



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE FÍSICA

---

# *Incertezas en la Evaluación del Decaimiento Semihadrónico del Leptón Tau y una Nueva Expansión Perturbativa*

por

Cristian Alexis Martínez Villalobos.

Tesis presentada a la Facultad de Física de la  
Pontificia Universidad Católica de Chile, como uno de  
los requisitos para optar al grado académico de  
Magíster en Física.

PROFESOR GUÍA : Dr. Marcelo Loewe.  
PROFESOR CO-GUÍA : Dr. Cristián Valenzuela.  
COMISIÓN INFORMANTE : Dr. Marco Aurelio Díaz.  
Dr. Andrés Gomberoff

Junio, 2010  
SANTIAGO – CHILE

Dedicada a mi abuelo Carlos Villalobos.

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres y hermanos por todo el apoyo a lo largo de mi vida.

A Paula Salinas por su amor, apoyo y comprensión.

A mis amigos de la oficina (Miguel, Timi y Chilombian) por el buen ambiente y la ayuda.

A Chanco Coquero F.C. en pleno (Boris, Maxito, Bastián, Nicolás, Simón, Pedro, Ipinza, Químico, Matías, Bicho), por los momentos de relaxo junto al balón. Ya saldremos campeones... algún día

Se agradece el apoyo financiero del proyecto FONDECYT 1095217 y al Centro de Estudios Subatómicos.

Por supuesto agradezco a mis profesores guías, Marcelo Loewe y Cristian Valenzuela, por la paciencia, disposición y compromiso con el desarrollo de esta tesis.

## AGRADECIMIENTOS

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>3</b>
2.1. Teoría de perturbaciones fija y mejorada . . . . .	10
<b>3. Extracción de <math>\alpha_s</math></b>	<b>13</b>
3.1. Error debido a truncación de las series . . . . .	18
3.2. Error debido a cambio de esquema de renormalización . . . . .	19
3.2.1. Esquemas de renormalización . . . . .	19
3.3. Error debido a la elección del punto de sustracción . . . . .	29
<b>4. Teoría de Perturbaciones Mejorada en el Contorno Modificada (MCI)</b>	<b>37</b>
4.1. Error MCI debido a truncación de la serie . . . . .	49
4.2. Error MCI debido a la elección de esquema y escala de renormalización .	51
<b>5. Conclusión</b>	<b>59</b>

## INTRODUCCIÓN

---

# Capítulo 1

## Introducción

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría de gauge de las interacciones fuertes. QCD describe la interacción entre quarks a través del intercambio de bosones de gauge vectoriales sin masa llamados gluones. Debido a la naturaleza no abeliana de la teoría, ésta también permite la interacción entre gluones, lo que la hace bastante más complicada que la Electrodinámica Cuántica (QED), su par abeliana, la cual es responsable de la descripción de la familiar interacción electromagnética.

La constante de acoplamiento fuerte  $\alpha_s(\mu) = \frac{g_s^2}{4\pi}$ , donde  $g_s$  es el acoplamiento de gauge de QCD (análogo a la carga eléctrica de QED), es un parámetro fundamental del modelo estándar de partículas elementales; su valor  $\alpha_s(m_Z)$  está listado entre las constantes de la naturaleza en el 'Review of particle physics' [1].

Determinaciones precisas de los parámetros fundamentales dentro del modelo estándar son de mucha importancia para testear la consistencia interna de la teoría. En el caso de  $\alpha_s$ , éste es el parámetro fundamental con el cual describimos nuestros observables en QCD. El valor de  $\alpha_s$  no es predicho por QCD, sin embargo sí predice la forma funcional de su dependencia con la energía. Es necesaria de esta forma la extracción experimental de  $\alpha_s$  a una energía dada. Determinar  $\alpha_s$  a una energía específica es entonces una medición fundamental. Testear QCD, no obstante, requiere mediciones de  $\alpha_s$  sobre distintos rangos de energía. Esto se ha hecho de forma exitosa. Extracciones de  $\alpha_s$  a partir de experimentos a escalas tan disímiles, que van desde  $m_\tau \sim 1,8$  GeV a  $\sim 200$  GeV son consistentes a un nivel cercano a 1 % después de evolución a  $m_Z \sim 90$  GeV [2] (el cual es por convención el valor de referencia), testeando de forma exitosa libertad asintótica.

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

---

Una de las determinaciones más precisas de  $\alpha_s$ , competitiva con el promedio mundial, es la que provee la investigación de la tasa de decaimiento del leptón  $\tau$  en hadrones. El  $\tau$  ( $m_\tau = 1,777$  GeV) es especial en el sentido en que es el único leptón que puede decaer semihadrónicamente, en un neutrino + hadrones. El electrón es estable, mientras que el muon es muy liviano para poder hacerlo. Estos decaimientos son una herramienta ideal para estudiar corrientes hadrónicas débiles. Otra ventaja es que al ser el tau un leptón lo suficientemente masivo como para decaer en hadrones, este decaimiento no tiene las complicaciones adicionales (al calcular y extraer) que traería el tener otro hadrón en el estado inicial.

Nuestro objeto de estudio será la razón  $R_\tau \equiv \frac{\Gamma[\tau^- \rightarrow \text{hadrons } \nu_\tau(\gamma)]}{\Gamma[\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau(\gamma)]}$ . Éste, al ser un observable, lo podemos describir perturbativamente en términos de potencias de  $\alpha_s$ . Experimentalmente disponemos de datos muy precisos al respecto [3].

Las complicaciones provienen del lado teórico. Por un lado tenemos que la masa del tau es muy cercana a la escala de QCD,  $E_{QCD} \sim 1\text{GeV}$ , lo que significa que estamos cerca del régimen no perturbativo. Felizmente en este caso, estos efectos están teóricamente bajo control. Sin embargo, el valor de  $\alpha_s$  a la escala  $m_\tau$  es lo suficientemente grande como para no esperar una pronta convergencia de la serie. Es así que las mayores incertezas teóricas provienen de las correcciones perturbativas no calculadas aún ( $\alpha_s^5$ ).

Otro problema emerge al querer mejorar la serie con la ayuda del grupo de renormalización (RGE). Así tenemos dos enfoques llamados Teoría de perturbaciones a orden fijo (FO) o mejorada en el contorno (CI) [4][5], que, debido al valor relativamente grande de  $\alpha(m_\tau^2)$ , llegan a resultados distintos.

En esta tesis nos enfocaremos en el tratamiento de las correcciones perturbativas de QCD a  $R_\tau$ . En el próximo capítulo presentaremos el formalismo que nos lleva a obtener la expresión perturbativa de  $R_\tau$ . También se presentan los dos enfoques más utilizados para evaluar estas series, FO y CI. En el capítulo 3 se discuten las diferencias numéricas entre estos dos enfoques, y cómo reaccionan ante la inclusión de un hipotético nuevo término en la serie, variación de esquema y escala de renormalización. En el capítulo 4 se propone una modificación a CI, la cual llamaremos Teoría de Perturbaciones Mejorada en el Contorno Modificada (MCI) [6]. Esta modificación resuelve ciertas ambigüedades en CI que presentaremos posteriormente. Además prueba ser un enfoque más estable que los anteriores ante la inclusión de un nuevo término en la serie y variación de escala.



## Capítulo 2

# Marco teórico

En la introducción enfatizamos la importancia de la determinación de la constante de acoplamiento fuerte ( $\alpha_s$ ). Una de las extracciones de  $\alpha_s$  más precisas es provista por la investigación de la tasa de decaimiento semihadrónica del  $\tau$ . Para eso definimos la razón:

$$R_\tau \equiv \frac{\Gamma[\tau^- \rightarrow \text{hadrons } \nu_\tau(\gamma)]}{\Gamma[\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau(\gamma)]}, \quad (2.1)$$

donde ( $\gamma$ ) representa posibles fotones adicionales o pares de leptones. Nos fijamos en las figuras 2.1 y 2.2. Si las correcciones fuertes no son tomadas en cuenta y si además ignoramos las masas de los estados finales, la universalidad del acoplamiento del  $W$  a las corrientes cargadas fermiónicas, -en el caso de quarks ponderadas por los ángulos de mezcla entre  $u$  y  $d$ , y  $u$  y  $s$  ( $|V_{ud}|^2$  y  $|V_{us}|^2$  respectivamente, con  $V_{ud}$  y  $V_{us}$  elementos de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa)- implica que la razón debiera ser

$$R_\tau^{naive} = N_c(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2) \simeq 3, \quad (2.2)$$

lo cual se compara relativamente bien con el valor experimental  $R_\tau = 3,640 \pm 0,010$  [7][8][9][10]. Esto provee una fuerte evidencia del grado de libertad de color  $N_c = 3$ . La diferencia con el valor experimental está cuantitativamente bien descrita por correcciones electrodébiles y fuertes, siendo estas últimas el tema central de esta tesis.

El decaimiento semihadrónico del  $\tau$  es probablemente el proceso a más baja energía en el cuál el acoplamiento fuerte (que corre como función de la energía, en adelante running coupling) puede ser extraído limpiamente sin complicaciones debido

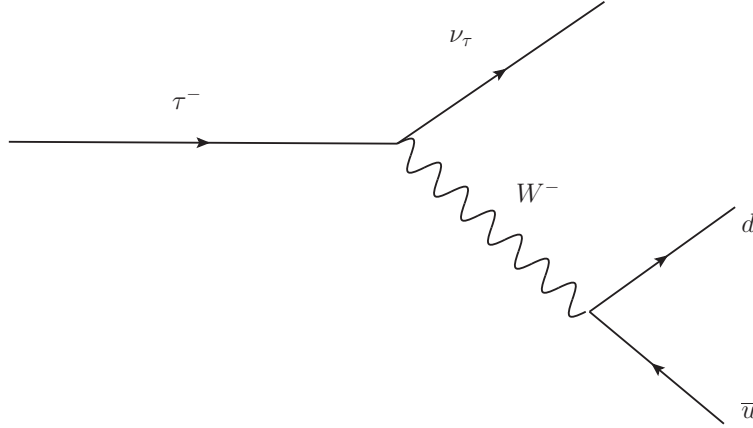


Figura 2.1: Decaimiento Hadrónico del  $\tau$  a nivel árbol.

a efectos no perturbativos [3][11]. La masa del tau está justo en una región en la cual el acoplamiento  $\alpha(m_\tau^2)$  es lo bastante grande tal que  $R_\tau$  es sensible a su valor, y es lo bastante chico como para que la expansión perturbativa converja razonablemente bien.

Experimentalmente, la tasa de decaimiento hadrónico del  $\tau$  puede ser separada en las contribuciones provenientes de las corrientes con extrañeza neta  $S = 1 \bar{u}s$  ( $R_{\tau,S}$ ) y sin extrañeza  $\bar{u}d$ . Dentro de estas últimas es posible separarlas en contribuciones vectoriales ( $R_{\tau,V}$ ) y axiales ( $R_{\tau,A}$ ). De esta forma separamos  $R_\tau$  en tres categorías

$$R_\tau = R_{\tau,V} + R_{\tau,A} + R_{\tau,S}. \quad (2.3)$$

Decaimientos semihadrónicos no extraños del  $\tau$  son resueltos experimentalmente en contribuciones vectoriales  $R_{\tau,V}$  y contribuciones axiales  $R_{\tau,A}$  de acuerdo a si el estado hadrónico final incluye un número par ( $R_{\tau,V}$ ) o impar ( $R_{\tau,A}$ ) de piones.

El análisis teórico de la tasa de decaimiento semihadrónica del  $\tau$  empieza con la función de correlación de dos puntos de las corrientes singletes de color de quarks vectoriales ( $V_{ij}^\mu = \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_i$ ) y axiales ( $A_{ij}^\mu = \bar{\psi}_j \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i$ ):

$$\Pi_{ij,V/A}^{\mu\nu}(q) \equiv i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T((V/A)_{ij}^\mu(x) (V/A)_{ij}^\nu(0)^\dagger) | 0 \rangle, \quad (2.4)$$

acá los subíndices  $i, j = u, d, s$  denotan sabores de quarks livianos. Los correladores anteriores tienen la siguiente descomposición de Lorentz:

$$\Pi_{ij,V/A}^{\mu\nu}(q) = (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \Pi_{ij,V/A}^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \Pi_{ij,V/A}^{(0)}(q^2) \quad (2.5)$$

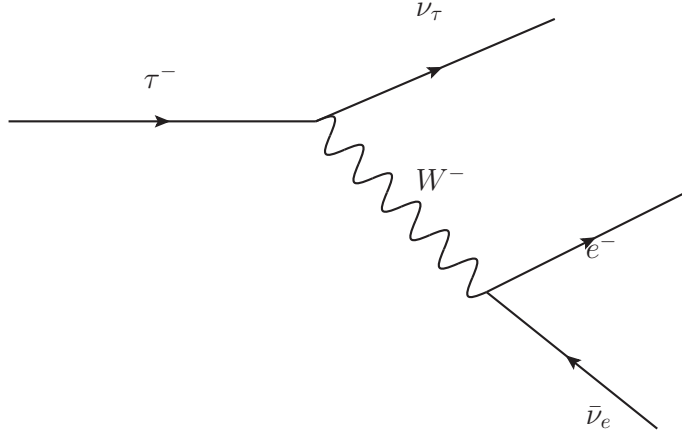


Figura 2.2: Decaimiento Leptónico del  $\tau$  a nivel árbol.

donde el superíndice ( $J$ ) denota el canal de momento angular  $J = 1$  o  $J = 0$ .

En el lado teórico,  $R_\tau$  puede ser expresado como una integral de las funciones espectrales  $Im\Pi^{(1)}(s)$  e  $Im\Pi^{(0)}(s)$  sobre la masa invariante  $s = q^2$  de los estados finales hadrónicos [12]:

$$R_\tau = 12\pi S_{EW} \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left[ \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) Im\Pi^1(s) + Im\Pi^0(s) \right], \quad (2.6)$$

el factor  $S_{EW}$  contiene correcciones electrodébiles las cuales omitiremos en lo siguiente, pero se tomarán en cuenta al hacer el análisis numérico. El límite inferior del espacio de fase resultante es igual a cero ya que la masa del pion en el límite quiral es cero. Lo anterior es porque nuestro estudio se concentra en las correcciones perturbativas fuertes a la razón  $R_\tau$  sin considerar la masa de los quarks livianos. Las correcciones de masa son pequeñas y han sido ampliamente discutidas en la literatura [3][13]. En este límite también podemos ver que  $\Pi^{(0)}(s) = 0$  ya que las identidades de Ward implican que  $\Pi^{\mu\nu}$  es transversal.

Las combinaciones apropiadas de las funciones de correlación de dos puntos resultantes del decaimiento débil del  $\tau$  a través del bosón  $W$  están dadas por

$$\Pi^J(s) \equiv |V_{ud}|^2 \left[ \Pi_{ud}^{V,(J)}(s) + \Pi_{ud}^{A,(J)}(s) \right] + |V_{us}|^2 \left[ \Pi_{us}^{V,(J)}(s) + \Pi_{us}^{A,(J)}(s) \right], \quad (2.7)$$

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Las funciones de correlación exactas son analíticas en el plano complejo  $s$ , salvo el corte a lo largo del eje positivo (desde el umbral de producción de partículas). De esta forma podemos invocar el Principio de Reflexión de Schwarz el cual nos dice que  $\Pi(z) = \Pi^*(z^*)$ . De esta forma podemos escribir la integral de interés

$$R_\tau = 12\pi \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \text{Im}\Pi^{(1)}(s), \quad (2.8)$$

de la forma siguiente. Vía uso del Teorema de Cauchy, ver figura 2.3, se tiene

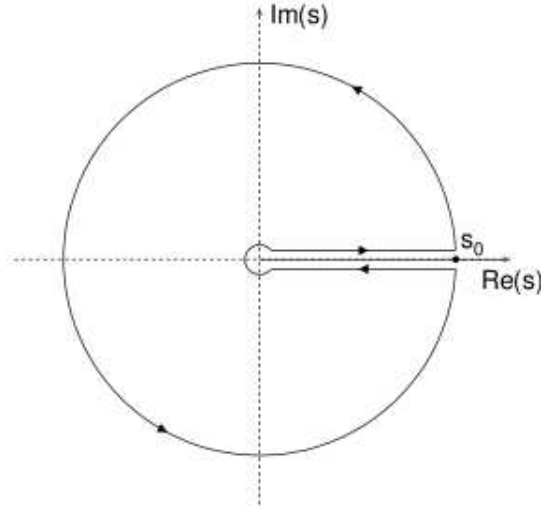


Figura 2.3: Contorno de integración en el plano complejo  $s$

$$\begin{aligned} \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi^{(1)}(s + i\epsilon) + \int_{m_\tau^2}^0 \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi^{(1)}(s - i\epsilon) \\ + \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi^{(1)}(s) = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

en las primeras dos integrales claramente estamos tomando  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$ . Seguimos desarrollando

$$\begin{aligned} \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) [\Pi^{(1)}(s + i\epsilon) - \Pi^{(1)}(s - i\epsilon)] \\ = - \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi^{(1)}(s). \end{aligned} \quad (2.10)$$

La primera integral la podemos escribir en términos de la parte imaginaria de  $\Pi^{(1)}$ ,  $\text{Im}\Pi^{(1)}(s + i\epsilon) = \frac{1}{2i}(\Pi^{(1)}(s + i\epsilon) - \Pi^{(1)*}(s + i\epsilon))$ . El principio de reflexión de Schwarz nos

dice que  $\Pi^{(1)}(s-i\epsilon) = \Pi^{(1)*}(s+i\epsilon)$ , de lo que obtenemos  $Im\Pi^{(1)}(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\frac{1}{2i}(\Pi^{(1)}(s+i\epsilon) - \Pi^{(1)}(s-i\epsilon))]$ . De esta forma reescribimos  $R_\tau$  (ecn. 2.8) como [11][14]

$$R_\tau = 6\pi i \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi^{(1)}(s). \quad (2.11)$$

La última expresión es preferida a ecn. 2.8 ya que requiere el correlador sólo para  $s$  complejo de módulo  $m_\tau^2$ , es decir, para una energía en que es posible ocupar QCD perturbativa.

El correlador  $\Pi^{(1)}(s)$  no es una cantidad física ya que contiene términos constantes (los  $c_{n,0}$  en ecn. 2.17) los cuales no aparecen en cantidades medibles [15]. Sin embargo, podemos obtener un observable considerando la derivada logarítmica de  $\Pi^{(1)}(s)$ , de esta forma se eliminan estos términos. Esta derivada de  $\Pi^{(1)}(s)$  es la bien conocida función de Adler [16]:

$$D^{(1)}(s) \equiv -s \frac{d}{ds} \left[ \Pi^{(1)}(s) \right]. \quad (2.12)$$

Trataremos de reescribir  $R_\tau$  en términos de la función de Adler. Para eso primero reescribimos la expresión (número) en términos de la variable adimensional  $x = \frac{s}{m_\tau^2}$  (por simplicidad)

$$R_\tau = 6\pi i \oint_{|x|=1} dx (1-x)^2 (1+2x) \Pi^{(1)}(m_\tau^2 x). \quad (2.13)$$

Un importante comentario sobre lo anterior. Para  $s$  lo suficientemente negativo, las contribuciones a  $\Pi^{(1)}(s)$  pueden ser organizadas en el marco de una expansión de producto de operadores (OPE) [14][17][18]. Afortunadamente, para  $R_\tau$  el factor cinemático  $(1-x)^2$  suprime la contribución de la región cercana al eje real donde  $\Pi^{(1)}(s)$  tiene un corte y la validez del OPE es dudosa debido a que ese formalismo funciona en el eje euclideo, donde estamos lejos de las resonancias [19].

Volvamos a la ecuación 2.13. Esta integral corre desde  $1+i\epsilon$  a  $1-i\epsilon$  (con  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Por lo que al integrar por partes obtenemos un término de borde.

$$\oint dx \frac{df(x)}{dx} g(x) = - \oint dx f(x) \frac{dg(x)}{dx} + \text{terminos de borde}, \quad (2.14)$$

con  $g(x) = \Pi^{(1)}(m_\tau^2 x)$  y  $\frac{df(x)}{dx} = (1-x)^2(1+2x)$ , lo que implica que  $f(x) = x - x^3 + \frac{x^4}{2} + cte$ . Fijamos la constante igual a  $\frac{-1}{2}$  de tal forma de eliminar el término de borde. De esa forma obtenemos  $f(x) = (1-x)^3(1+x)$ , lo cual nos garantiza la supresión en el corte físico y mejor aún ésta es de orden 3. De esta forma, recordando la definición de la función de Adler, obtenemos

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

---

$$R_\tau = -3\pi i \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) D^{(1)}(m_\tau^2 x). \quad (2.15)$$

$D^{(1)}(s)$  (en el marco del OPE) contiene correcciones electrodébiles, correcciones fuertes -considerando quarks sin masa, con masa y efectos no perturbativos-. Separamos todas esas contribuciones. Así resolviendo la integral anterior y extrayendo los términos proporcionales a  $|V_{ud}|^2$  obtenemos [11][17][18][20]

$$R_{\tau, V+A} = N_c S_{EW} |V_{ud}|^2 \left[ 1 + \delta^{(0)} + \delta_{EW} + \delta_2 + \delta_{NP} \right], \quad (2.16)$$

aquí,  $S_{EW} = 1,0198 \pm 0,0006$  [21] y  $\delta_{EW} = 0,0010 \pm 0,0010$  [22] son correcciones electrodébiles,  $\delta^{(0)}$  comprende las correcciones perturbativas de QCD en el límite quiral (el cuál constituye el objeto de interés central de éste trabajo),  $\delta_2$  denota efectos de masa de quarks livianos y  $\delta_{NP}$  efectos no perturbativos, los cuales se sabe son pequeños [3][13].

La corrección puramente perturbativa  $\delta^{(0)}$  sólo recibe contribuciones de la función de correlación en el límite quiral. Como en este límite contribuciones axiales y vectoriales coinciden [15][3], podemos restringirnos al estudio de la expansión perturbativa del correlador vectorial  $\Pi_V^{(0)}(s)$  en el caso de quarks sin masa. Éste exhibe la estructura general [15] (recordar factor global  $|V_{ud}|^2$  en ecn. 2.7)

$$\Pi_V^{(1)}(s) = -\frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a(\mu^2)^n \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} L^k, \quad (2.17)$$

con  $a(\mu^2) \equiv \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}$ ,  $L \equiv \ln \frac{-s}{\mu^2}$  y  $\mu$  la escala de renormalización. Recordando la definición de la función de Adler tenemos que

$$D_V^{(1)}(s) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a(\mu^2)^n \sum_{k=1}^{n+1} k c_{n,k} L^{k-1} \quad (2.18)$$

en esta expresión sólo los coeficientes  $c_{n,1}$  son independientes. Los coeficientes  $c_{n,k}$  con  $k = 2, \dots, n+1$  pueden ser relacionados con los  $c_{n,1}$  y coeficientes de la función beta (procedimiento que realizaremos posteriormente) vía ecuación del grupo de renormalización. Además  $c_{n,n+1} = 0$  para  $n \geq 1$  y los coeficientes  $c_{n,0}$  no aparecen debido a que se anulan cuando derivamos  $\Pi_V^{(1)}(s)$ .

Como la función de Adler satisface una ecuación del grupo de renormalización homogénea, los logaritmos del grupo de renormalización pueden ser resumados lo que equivale a fijar la escala de renormalización  $\mu^2 = -s \equiv Q^2$ . De esta forma llegamos a la simple expresión

---


$$D_V^{(1)}(Q^2) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,1} a^n(Q^2) \quad (2.19)$$

Los coeficientes de ésta expansión están calculados hasta  $n = 4$  [23][24][25]. En el esquema  $\overline{MS}$  éstos son [26]

$$c_{0,1} = c_{1,1} = 1; \quad c_{2,1} = 1,640; \quad c_{3,1} = 6,371; \quad c_{4,1} = 49,076 \quad (2.20)$$

Sin perjuicio de lo anterior derivaremos los coeficientes  $c_{n,k}$  y su relación con los coeficientes  $c_{n,1}$  hasta  $n = 5$  para su uso posterior. Lo primero que haremos es una expansión de Taylor de  $a(Q^2)$  alrededor de  $a(\mu^2)$ , así

$$\begin{aligned} a(Q^2) = & a(\mu^2) + \frac{da}{d\ln(Q^2)} \Big|_{Q^2=\mu^2} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{d\ln(Q^2)^2} \Big|_{Q^2=\mu^2} \ln^2\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \\ & + \frac{1}{6} \frac{d^3a}{d\ln(Q^2)^3} \Big|_{Q^2=\mu^2} \ln^3\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{24} \frac{d^4a}{d\ln(Q^2)^4} \Big|_{Q^2=\mu^2} \ln^4\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

la ecuación del grupo de renormalización nos dice:

$$\frac{da(\mu^2)}{d\ln(\mu^2)} = -\beta_1 a^2(\mu^2) - \beta_2 a^3(\mu^2) - \beta_3 a^4(\mu^2) - \beta_4 a^5(\mu^2), \quad (2.22)$$

usando regla de la cadena y hasta orden  $a(\mu)^5$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{d\ln(Q^2)^2} \Big|_{Q^2=\mu^2} &= 2\beta_1^2 a^3(\mu^2) + 5\beta_1\beta_2 a^4(\mu^2) + 3\beta_2^2 a^5(\mu^2), \\ \frac{d^3a}{d\ln(Q^2)^3} \Big|_{Q^2=\mu^2} &= -6\beta_1^3 a^4(\mu^2) - 20\beta_1^2\beta_2 a^5(\mu^2), \\ \frac{d^4a}{d\ln(Q^2)^4} \Big|_{Q^2=\mu^2} &= 24\beta_1^4 a^5(\mu^2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entonces para que las expresiones 2.18 y 2.19 sean perturbativamente equivalentes hasta  $n = 5$ , tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
c_{2,2} &= -\frac{1}{2}\beta_1 c_{1,1} \\
c_{3,2} &= -\frac{1}{2}(\beta_2 c_{1,1} + 2\beta_1 c_{2,1}) \\
c_{3,3} &= \frac{1}{3}\beta_1^2 c_{1,1} \\
c_{4,2} &= -\frac{1}{2}(\beta_3 c_{1,1} + 2\beta_2 c_{2,1} + 3\beta_1 c_{3,1}) \\
c_{4,3} &= \frac{1}{6}(5\beta_1\beta_2 c_{1,1} + 6\beta_1^2 c_{2,1}) \\
c_{4,4} &= -\frac{1}{4}\beta_1^3 c_{1,1} \\
c_{5,2} &= -\frac{1}{2}(\beta_4 c_{1,1} + 2\beta_3 c_{2,1} + 3\beta_2 c_{3,1} + 4\beta_1 c_{4,1}) \\
c_{5,3} &= \frac{1}{6}(6\beta_1\beta_3 c_{1,1} + 3\beta_2^2 c_{1,1} + 14\beta_1\beta_2 c_{2,1} + 12\beta_1^2 c_{3,1}) \\
c_{5,4} &= -\frac{1}{12}(13\beta_1^2\beta_2 c_{1,1} + 12\beta_1^3 c_{2,1}) \\
c_{5,5} &= \frac{1}{5}\beta_1^4 c_{1,1}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

## 2.1. Teoría de perturbaciones fija y mejorada

Ahora discutiremos opciones de como resumar los logaritmos que aparecen en la expansión de  $D_V^{(1)}(s)$ . Primero insertamos ecn 2.18 en la fórmula para  $R_\tau$ . Así obtenemos

$$R_\tau = -3\pi i \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a(\mu^2)^n \sum_{k=1}^{n+1} k c_{n,k} \ln^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right). \tag{2.25}$$

Veamos el término  $n = 0$

$$R_\tau^{n=0} = \frac{N_c c_{0,1}}{4\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \tag{2.26}$$

pasamos a variable angular  $x = -e^{i\theta} \rightarrow dx = -ie^{i\theta} d\theta$ , entonces

$$R_\tau^{n=0} = \frac{N_c c_{0,1}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1 + e^{i\theta})^3 (1 - e^{i\theta}) = \frac{N_c c_{0,1}}{2}, \tag{2.27}$$

los términos periódicos son cero, así que la integral es simplemente  $2\pi$ , como  $c_{0,1} = 1$  tenemos que  $R_\tau^{n=0} = \frac{N_c}{2}$ , además recordemos que los términos  $c_{n,n+1} = 0$ , por lo que separando el término  $n = 0$  del resto tenemos que

$$R_\tau = \frac{N_c}{2} \left( 1 + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \ln^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right) \right), \tag{2.28}$$



## 2.1. TEORÍA DE PERTURBACIONES FIJA Y MEJORADA

observando la ecuación 2.16 donde separamos las distintas contribuciones para  $R_\tau$  identificamos

$$\delta^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \ln^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right). \quad (2.29)$$

Hay dos enfoques de cómo evaluar la expresión anterior llamados teoría de perturbaciones a orden fijo (Fixed order perturbation theory, FO) y teoría de perturbaciones mejorada en el contorno (Contour improved perturbation theory, CI). En FO la función de Adler (ecn 2.18) es evaluada con la escala de renormalización fija,  $\mu^2 = m_\tau^2$ . Así ecuación 2.29 en este enfoque se convierte en:

$$\delta_{FO}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} a(m_\tau^2)^n \sum_{k=1}^n k c_{n,k} J_{k-1} \quad (2.30)$$

Las integrales de contorno  $J_l$  son definidas de la siguiente manera

$$J_l = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \ln^l(-x) \quad (2.31)$$

En el caso de CI, aprovechamos que la función de Adler satisface una ecuación del grupo de renormalización homogénea para mejorar el resultado anterior. Ocupamos la función de Adler mejorada (ecn. 2.19) a lo largo del contorno de integración en ecuación 2.15 ( $\mu^2 = Q^2 = -m_\tau^2 x$  en ecuación 2.29), así obtenemos en este enfoque:

$$\delta_{CI}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} J_n^a(m_\tau^2), \quad (2.32)$$

con las integrales de contorno sobre la running coupling  $J_n^a$  definidas del modo siguiente

$$J_n^a(m_\tau^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) a^n(-m_\tau^2 x), \quad (2.33)$$

donde  $a^n(-m_\tau^2 x)$  la obtenemos mediante el empleo del grupo de renormalización.

Es importante notar que si la constante de acoplamiento fuera pequeña, ambos métodos darían prácticamente el mismo resultado. El problema es que estamos en una región de energía en la cual el acoplamiento es suficientemente chico como para hacer teoría de perturbaciones (aunque necesitamos cálculos de varios loops para tener estimaciones confiables), pero es grande en el sentido que las diferencias entre ambos métodos dan resultados sensiblemente distintos. Desde el punto de vista teórico la mayor incerteza en la extracción de  $\alpha_s$  proviene de este hecho<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>En el caso que se considere FO seriamente. Muchos grupos, incluyendo el presente trabajo, sólo consideran CI y descartan FO.

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

---

## Capítulo 3

# Extracción de $\alpha_s$

Primero ilustraremos la diferencia entre ambos métodos (FO y CI) al calcular  $\delta_{FO}^{(0)}$  y  $\delta_{CI}^{(0)}$  usando  $\alpha_s$  como input, y ver cuán exactamente reproducen el valor experimental de  $R_\tau$ . Luego haremos el proceso inverso al ajustar nuestros valores de  $\delta_{FO}^{(0)}$  y  $\delta_{CI}^{(0)}$  con  $\delta_{exp}$  y así extraer el valor de  $\alpha_s$ . Para comenzar trabajaremos en el esquema de renormalización  $\overline{MS}$ . Nuestro punto de partida es el siguiente:

$$\delta_{FO}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} a(m_\tau^2)^n \sum_{k=1}^n k c_{n,k} J_{k-1} \quad (3.1)$$

con las integrales  $J_l$  definidas en 2.31. Los coeficientes  $c_{n,k}$  están definidos en función de los coeficientes  $c_{n,1}$  en la ecuación 2.24. Hasta el momento el coeficiente más alto calculado es el  $c_{4,1}$  (5 loops) [25] por lo que necesitaremos el valor numérico de las primeras integrales  $J_l$  y los coeficientes  $c_{n,k}$  con  $n \leq 4$

$$J_0 = 1; J_1 = -\frac{19}{12}; J_2 = \frac{265}{72} - \frac{\pi^2}{3}; J_3 = \frac{-3355}{288} - \frac{19\pi^2}{12} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} c_{2,2} &= -1,125 \\ c_{3,2} &= -5,690 \\ c_{3,3} &= 1,688 \\ c_{4,2} &= -33,092 \\ c_{4,3} &= 15,803 \\ c_{4,4} &= -2,848 \end{aligned} \quad (3.3)$$

para lo anterior se ocuparon los valores de los coeficientes de la función beta con  $N_f = 3$  en el esquema  $\overline{MS}$ . De ahora en adelante  $\beta_i \equiv \beta_i^{\overline{MS}}$  por simplicidad. Los coeficientes de la función beta en la ecuación 2.22 son [27][28]

### CAPÍTULO 3. EXTRACCIÓN DE $\alpha_S$

---

n	1	2	3	4	total
$\delta_{FO}^{(0)}$	0.1082	0.0609	0.0334	0.0174	0.2200
$\delta_{CI}^{(0)}$	0.1479	0.0297	0.0122	0.0086	0.1984

**Cuadro 3.1:** Comparación a orden  $n$  de los distintos términos en las expansiones FO y CI usando  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,34$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{4} \left( 11 - \frac{2}{3} N_f \right) = 2,25 \\ \beta_2 &= \frac{1}{16} \left( 102 - \frac{38}{3} N_f \right) = 4 \\ \beta_3 &= \frac{1}{64} \left( \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} N_f + \frac{325}{54} N_f^2 \right) = 10,0599\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{1}{256} \left[ \frac{149753}{6} - 3564\zeta_3 - \left( \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta_3 \right) N_f + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3 \right) N_f^2 + \frac{1093}{729} N_f^3 \right] = 47,2280\end{aligned}\quad (3.4)$$

Teniendo los valores de las integrales  $J_i$ , los coeficientes  $c_{n,k}$  y  $\beta_i$ , podemos determinar a partir de la ecuación 2.30 el valor de  $\delta_{FO}^{(0)}$  en función de  $\alpha_s^{\overline{MS}}$ .

$$\delta_{FO}^{(0)} = a + 5,5025a^2 + 26,3672a^3 + 127,0821a^4 \quad (3.5)$$

en lo anterior  $a \equiv a(m_\tau^2)$ .

Ahora veamos que predice CI. Recordemos la definición de  $\delta_{CI}^{(0)}$  (ecn. 2.23) y las integrales  $J_n^a \equiv J_n^a(m_\tau^2)$ , de esta forma obtenemos

$$\delta_{CI}^{(0)} = J_1^a + 1,640J_2^a + 6,371J_3^a + 49,076J_4^a, \quad (3.6)$$

en términos de  $a(m_\tau^2)$ . Ahora compararemos término por término ambas expresiones, aunque en cierto modo ésta no es la mejor comparación. Viendo la estructura de las series -ver ecuación 2.21  $\mu^2 = m_\tau^2$ -, un orden  $n$  dado CI, contiene contribuciones de órdenes superiores FO. Además CI suma logaritmos que acompañan a potencias superiores a 4 en  $\alpha(m_\tau^2)$  lo que que no ocurre en FO. Sin embargo lo haremos para establecer diferencias.

Viendo el cuadro 3.1 podemos constatar que los dos enfoques tienen diferencias numéricas significativas. Las series CI muestran una convergencia más rápida, pero las

---

dos series no parecen acercarse a medida que términos sucesivos son añadidos. Sumando las dos series hasta orden  $n = 4$  (qué es hasta lo que se conoce), la diferencia entre FO y CI es de 0.0216 lo cuál es del orden del último término incluidos en la serie FO y alrededor de 2.5 veces el tamaño del último término en la serie CI.

Ahora haremos el procedimiento inverso. Tenemos la forma funcional de  $\delta_{FO}^{(0)}$  y  $\delta_{CI}^{(0)}$  en las ecuaciones 3.5 y 3.6 con lo cual podemos extraer  $\alpha_s$  en ambos enfoques. Primero determinaremos el valor de  $\delta_{exp}^{(0)}$  a partir del valor de  $R_{\tau}^{exp}$ . Partiendo de la ecuación 2.16 tenemos

$$\delta_{exp}^{(0)} = \frac{R_{\tau,V+A}}{N_c S_{EW} |V_{ud}|^2} - \delta_{EW} - \delta_2 - \delta_{NP} - 1, \quad (3.7)$$

con  $R_{\tau,V+A} = 3,479 \pm 0,011$  [3],  $S_{EW} = 1,0198 \pm 0,0006$  [21],  $\delta_{EW} = 0,0010 \pm 0,0010$  [22],  $\delta_2 = (-4,3 \pm 2,0) \times 10^{-4}$  [3],  $\delta_{NP} = (-5,9 \pm 1,4) \times 10^{-3}$  [3] y  $V_{ud} = 0,97418 \pm 0,00027$  [1]. Con esos valores el valor central de  $\delta_{exp}^{(0)} = 0,204$  (tengo sólo 4 cifras significativas en  $R_{\tau,V+A}$ ).

Si consideramos todos los errores independientes, entonces tenemos que cada error es ortogonal al otro, por lo que el error total es simplemente la norma pitagórica de todos los errores.

Calcularemos como los errores en las cantidades anteriores dan cuenta de un error propagado a  $\delta^{(0)}$ . A éste error le llamaremos experimental.

$$\Delta\delta_{exp}^{(0)} = ((\Delta\delta_{R_{\tau,V+A}}^{(0)})^2 + (\Delta\delta_{S_{EW}}^0)^2 + (\Delta\delta_{\delta_{EW}}^0)^2 + (\Delta\delta_{\delta_2}^0)^2 + (\Delta\delta_{\delta_{NP}}^0)^2 + (\Delta\delta_{|V_{ud}|^2}^{(0)})^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

Si el error es pequeño en comparación al valor central podemos considerar que

$$\Delta\delta_{R_{\tau,V+A}}^{(0)} = \left( \frac{\partial\delta^{(0)}}{\partial R_{\tau,V+A}} \right) (\Delta R_{\tau,V+A}), \quad (3.9)$$

$$\Delta\delta_{S_{EW}}^0 = \left( \frac{\partial\delta^{(0)}}{\partial S_{EW}} \right) (\Delta S_{EW}), \quad (3.10)$$

$$\Delta\delta_{|V_{ud}|^2}^{(0)} = \left( \frac{\partial\delta^{(0)}}{\partial |V_{ud}|^2} \right) (\Delta |V_{ud}|^2). \quad (3.11)$$

Si el error es comparable al valor central, como es el caso de  $\Delta\delta_{EW}$ ,  $\Delta\delta_2$  y  $\Delta\delta_{NP}$ , lo anterior no es válido. Eso no es problema pues en éste caso  $\delta_{EW}$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_{NP}$  entran de una manera muy sencilla en la expresión para  $\delta_{exp}^{(0)}$ . Así tenemos simplemente que

$\Delta R_{\tau, V+A}$	0.011	$\Delta \delta_{R_{\tau, V+A}}^{(0)}$	0.0038
$\Delta S_{EW}$	0.0006	$\Delta \delta_{S_{EW}}^0$	0.0007
$\Delta \delta_{EW}$	0.0010	$\Delta \delta_{\delta_{EW}}^{(0)}$	0.0010
$\Delta \delta_2$	0.0002	$\Delta \delta_{\delta_2}^{(0)}$	0.0002
$\Delta \delta_{NP}$	0.0014	$\Delta \delta_{\delta_{NP}}^{(0)}$	0.0014
$\Delta  V_{ud} ^2$	0.00022	$\Delta \delta_{ V_{ud} ^2}^{(0)}$	0.0007
		$\Delta \delta_{exp}^{(0)}$	0.004

**Cuadro 3.2:** Errores en las distintas cantidades involucradas en el cálculo de  $\delta_{exp}^{(0)}$  y su impacto en el error total  $\Delta \delta_{exp}^{(0)}$

$$\Delta \delta_{\delta_{EW}}^{(0)} = \Delta \delta_{EW}, \quad (3.12)$$

$$\Delta \delta_{\delta_2}^{(0)} = \Delta \delta_2, \quad (3.13)$$

$$\Delta \delta_{\delta_{NP}}^{(0)} = \Delta \delta_{NP}. \quad (3.14)$$

En el cuadro 3.2 está la contribución de cada término al error  $\Delta \delta_{exp}^{(0)}$ . Vemos en ella que el error que domina proviene del error experimental de  $R_\tau$ .

$$\text{Así } \delta_{exp}^{(0)} = 0,204 \pm 0,004_{exp}.$$

Luego vemos el error en  $\alpha_s$  a partir de  $\delta_{exp}^{(0)}$  de la siguiente forma

$$\Delta a = \left| \frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}} \right| \Delta \delta^{(0)}. \quad (3.15)$$

En el caso de FO es fácil evaluar el error anterior. Recordemos que

$$\delta_{FO}^{(0)} = a + l_1 a^2 + l_2 a^3 + l_3 a^4, \quad (3.16)$$

con  $l_1 = 5,2025$ ,  $l_2 = 26,3672$ ,  $l_3 = 127,0821$  (ecn. 3.5).

Entonces tenemos que

$$1 = \frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}} + 2al_1 \frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}} + 3a^2 l_2 \frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}} + 4a^3 l_3 \frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}}, \quad (3.17)$$

lo que implica que

$$\frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}} = \frac{1}{1 + 2al_1 + 3a^2 l_2 + 4a^3 l_3}. \quad (3.18)$$

Teniendo ésto, extraemos el valor central y el error. Igualando  $\delta_{FO}^{(0)} = \delta_{exp}^{(0)} = 0,204$  obtenemos el valor central de  $\alpha_s^{FO}$  y con la última fórmula (y 3.15) obtenemos el error experimental, así

$$\alpha_s^{FO} = 0,326 \pm 0,004_{exp}. \quad (3.19)$$

Ahora si usamos CI, el procedimiento para obtener el error de forma analítica es un poco más complicado. Primero obtengamos el valor central, para eso igualamos (ver ecn. 3.6)  $\delta_{CI}^{(0)} = \delta_{exp}^{(0)} = 0,204$  con lo que obtenemos el valor central  $\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) = 0,347$ . Para ver el error en  $\alpha_s$  optamos por usar el siguiente procedimiento. Usando las ecuaciones 2.21, 2.22 y 2.23, tenemos que la coupling  $a(-m_\tau^2 x)$  que usamos en la definición de las integrales  $J_n^a(m_\tau^2)$  la podemos escribir de forma aproximada en términos de  $a(m_\tau^2)$ . En el contorno  $x = -e^{i\theta}$  tenemos

$$\begin{aligned} a(m_\tau^2 e^{i\theta}) &= a(m_\tau^2) - \beta_1 \ln(e^{i\theta}) a^2(m_\tau^2) + (-\beta_2 \ln(e^{i\theta}) + \beta_1^2 \ln^2(e^{i\theta})) a^3(m_\tau^2) \\ &\quad + (-\beta_3 \ln(e^{i\theta}) + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_2 \ln^2(e^{i\theta}) - \beta_1^3 \ln^3(e^{i\theta})) a^4(m_\tau^2) \\ &\quad + (-\beta_4 \ln(e^{i\theta}) + \frac{3}{2} \beta_2^2 \ln^2(e^{i\theta}) + 3\beta_1 \beta_3 \ln^2(e^{i\theta}) - \frac{13}{3} \beta_1^2 \beta_2 \ln^3(e^{i\theta}) + \beta_1^4 \ln^4(e^{i\theta})) a^5(m_\tau^2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Reemplazamos ecuación anterior en la definición de  $\delta_{CI}^{(0)}$  (ecn. 2.32) con lo cuál obtenemos su versión aproximada en términos de las integrales  $J_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1 + 2e^{i\theta} - 2e^{3i\theta} - e^{4i\theta}) \ln^l(e^{i\theta})$ . Como tenemos  $a(m_\tau^2 e^{i\theta})$  en términos de logaritmos hasta orden 4 y necesitamos calcular hasta la integral  $J_4^a(m_\tau^2)$  entonces debemos calcular hasta  $J_{16}$ . Hacemos todo lo anterior para expresar en forma analítica el valor de  $\delta_{CI}^{(0)}$  en términos de  $a(m_\tau^2)$ . Eso como veremos simplifica el análisis de los errores. Cómo es una gran cantidad de integrales a calcular sólo pondremos el resultado final

$$\begin{aligned} \delta_{CI,aprox}^{(0)} &= a + 5,20a^2 + 26,37a^3 + 127,08a^4 + 307,76a^5 \\ &\quad - 2,92 \cdot 10^3 a^6 - 7,50 \cdot 10^4 a^7 - 5,78 \cdot 10^5 a^8 - 7,38 \cdot 10^5 a^9 + 2,17 \cdot 10^7 a^{10} \\ &\quad 1,58 \cdot 10^8 a^{11} + 1,08 \cdot 10^8 a^{12} - 4,13 \cdot 10^9 a^{13} - 1,94 \cdot 10^{10} a^{14} + 1,29 \cdot 10^{10} a^{15} \\ &\quad 3,77 \cdot 10^{11} a^{16} + 8,83 \cdot 10^{11} a^{17} - 1,67 \cdot 10^{12} a^{18} - 1,05 \cdot 10^{13} a^{19} - 9,56 \cdot 10^{12} a^{20} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ahora podemos ver el error de una manera aproximada, pero analítica. Reescribimos la ecuación anterior

$$\delta_{CI,aprox}^{(0)} = \sum_{i=1}^{20} l_i a^i, \quad (3.22)$$

lo que implica que

$$1 = \sum_{i=1}^{20} il_i a^{i-1} \frac{\partial a}{\partial \delta_{CI}^{(0)}}, \quad (3.23)$$

entonces

$$\Delta a = \frac{\Delta \delta^{(0)}}{\sum_{i=1}^{20} il_i a^{i-1}} \Big|_{a_{central}}. \quad (3.24)$$

Así tomando  $\Delta \delta_{exp}^{(0)} = 0,004$  tenemos que  $\Delta \alpha_{exp} = 0,005$ . Entonces hasta el momento

$$\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) = 0,347 \pm 0,005_{exp}. \quad (3.25)$$

Un último comentario. Si ocupamos la versión aproximada de  $\delta_{CI}^{(0)}$  en términos de  $a(m_\tau^2)$  al hacer la expansión de Taylor de  $a(m_\tau^2 e^{i\theta})$  y para cada término  $a^n(m_\tau^2 e^{i\theta})$  cortáramos a un orden fijo  $n$  en  $a$ , digamos en  $a^4$ , obtendríamos  $\delta_{FO}^{(0)}$ . Por eso decimos que la diferencia entre FO y CI está en los órdenes superiores  $a^m(m_\tau^2)$  con  $m > n$ .

### 3.1. Error debido a truncación de las series

Como sabemos, un observable se plantea como una serie perturbativa en términos de un parámetro de expansión, en nuestro caso  $\alpha_s$ . Esta serie suele tener sólo unos pocos términos, confiando en una pronta convergencia<sup>1</sup>. En nuestro caso, debido a lo relativamente grande de nuestro parámetro de expansión, no esperamos que esto ocurra pronto, por lo que cálculos que determinen órdenes superiores pueden ser importantes y cambiar cuantitativamente de una forma apreciable nuestro observable (en este caso  $\delta^{(0)}$ ).

Una forma de tener una idea del efecto de no tener una serie completa sino truncada, es estimar la hipotética contribución del primer término no calculado de la serie. Aquí veremos dos approaches distintos para determinar el error de truncación en FO y CI.

En FO encontramos

$$\delta_{FO}^{(0)} = a + 5,2025a^2 + 26,3672a^3 + 127,0821a^4 \quad (3.26)$$

Evaluemos lo anterior usando el valor extraído  $\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) = 0,326$ . Término por término ésto es

$$\delta_{FO}^{(0)} = 0,104 + 0,056 + 0,029 + 0,015 \quad (3.27)$$

---

<sup>1</sup>Una convergencia aparente, ya que sabemos que estamos lidiando con expansiones asintóticas



### 3.2. ERROR DEBIDO A CAMBIO DE ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN

---

Observamos que más o menos cada nuevo término es la mitad del anterior, por lo que es razonable suponer que el módulo del próximo término va a ser alrededor de 0,008. Usamos lo anterior para estimar el error por la truncación, así

$$\Delta\delta_{FO, trunc}^{(0)} = 0,008 \rightarrow \Delta\alpha_s^{FO, trunc} = \left| \frac{\partial a}{\partial \delta^{(0)}} \right| \Delta\delta_{FO, trunc}^{(0)} \pi = 0,007 \quad (3.28)$$

En el caso de CI estimaremos el error de una manera diferente. Sabemos que el último coeficiente calculado de la función de Adler es  $c_{4,1}$ . Para estimar el error que nos da un nuevo término en la serie consideramos el valor de  $c_{5,1} = 145$  que es el valor central de la estimación de ese número dado por "Principle of Minimal Sensitivity (PMS)"[29][30][31]. Así

$$\delta_{CI}^{(0)} = c_{1,1}J_1^a(m_\tau^2) + c_{2,1}J_2^a(m_\tau^2) + c_{3,1}J_3^a(m_\tau^2) + c_{4,1}J_4^a(m_\tau^2) + c_{5,1}J_5^a(m_\tau^2), \quad (3.29)$$

evaluando lo anterior en  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,347$  obtenemos  $\delta_{CI}^{(0)} = 0,206$ , por lo que consideramos, usando ecuación 3.24

$$\Delta\delta_{CI, trunc}^{(0)} = 0,002 \rightarrow \Delta\alpha_s^{CI, trunc} = 0,002. \quad (3.30)$$

Este procedimiento lo podemos considerar también para FO, con la ayuda de las ecuaciones 2.24 dando el mismo resultado que en nuestra primera estimación ( $\Delta\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) = 0,007$ ), eso justifica nuestra elección  $c_{5,1} = c_{5,1}^{PMS}$ .

De lo anterior podemos decir que CI es un método con convergencia aparente mucho mejor que FO. Además FO, es mucho más sensible a un nuevo término en la serie que CI.

## 3.2. Error debido a cambio de esquema de renormalización

### 3.2.1. Esquemas de renormalización

Por el término renormalización queremos decir, junto a la redefinición de la masa y el acoplamiento, el reajuste de la normalización de las funciones de Green por apropiados factores multiplicativos que pueden eliminar posibles infinitos en ellas. Es importante notar aquí que la manera de eliminar divergencias en teoría de perturbaciones no es única. La diferencia va en cómo defino la parte finita de los contratérminos, eso me lleva a distintos esquemas de renormalización. Dos esquemas diferentes de renormalización

### CAPÍTULO 3. EXTRACCIÓN DE $\alpha_S$

---

están siempre conectados por una renormalización finita. Por ejemplo consideremos el acoplamiento

$$g_R = g_0 + \Delta g_{fin} + \Delta g_{inf} + \delta g_{fin} + \delta g_{inf}, \quad (3.31)$$

con  $g_0$  el parámetro que aparece en el lagrangiano,  $\Delta g_{fin}$  y  $\Delta g_{inf}$  las partes convergente y divergente de las correcciones cuánticas,  $\delta g_{fin}$  y  $\delta g_{inf}$  las partes convergente y divergente del contratérmino.  $\delta g_{fin}$  es arbitrario y da origen a los distintos esquemas de renormalización. En orden de cancelar las divergencias, requerimos que  $\Delta g_{inf} = -\delta g_{inf}$

Como un ejemplo consideremos la autoenergía de un quark sin masa a un loop. En regularización dimensional el propagador con correcciones cuánticas es

$$S_{ij} = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \frac{1}{1 + \sigma(p^2)}, \quad (3.32)$$

con

$$\sigma(p^2) = \frac{-g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{4\pi\mu^2}\right) \right), \quad (3.33)$$

con  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $\epsilon \equiv D - 4$ ). Renormalizamos el propagador del quark  $S_{ij}(p)$  por un factor multiplicativo  $Z$ . Así

$$S_{Rij}(p) = Z^{-1} S_{ij}(p), \quad (3.34)$$

con  $Z = 1 - \delta Z$  (a 1 loop).  $\delta Z$  a orden  $g_0^2$ .

$\delta Z$  tiene parte divergente que cancelará la de  $\sigma(p^2)$ .

$$S_{Rij}(p) = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \frac{1}{1 + \sigma(p^2)} \frac{1}{1 - \delta Z} = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \frac{1}{1 + \sigma(p^2) - \delta Z - \delta Z \sigma(p^2)} \quad (3.35)$$

El último término en el denominador lo desechamos (es orden  $g_0^4$ ). Así

$$S_{Rij}(p) = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \frac{1}{1 + \sigma(p^2) - \delta Z} \quad (3.36)$$

En lo anterior  $g_0^2$  debiera ser reemplazado por su versión renormalizada, pero al orden que estamos  $g_R^2 = g_0^2$  ya que  $g_R^2 = g_0^2(1 + \delta Z_2)$  con  $\delta Z_2$  ya de orden  $g_0^2$ .

Como  $S_{Rij}(p^2)$  es el propagador renormalizado debiera estar libre de divergencias y así  $\sigma(p^2) - \delta Z$  tiene que ser finito. Ese requerimiento determina  $Z$  excepto por una constante finita aditiva. Un requerimiento adicional a la parte finita de  $\delta Z$  nos fija el esquema de renormalización. A continuación mostraremos algunos esquemas de renormalización populares.

### 3.2. ERROR DEBIDO A CAMBIO DE ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN

---

#### Esquema on-shell

La constante de renormalización  $Z$  es determinada para  $\not{p} = m$  por la condición

$$S_{Rij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{m - \not{p}} \quad (3.37)$$

en nuestro ejemplo  $m = 0$  por lo que la condición queda

$$S_{Rij}(p) = -\frac{\delta_{ij}}{\not{p}} \quad (3.38)$$

para eso necesitamos que  $\sigma(0) = \delta Z$ . En nuestro caso  $\sigma(0)$  no está bien definido.

#### Sustracción off-shell (MOM)

Requerimos que a un valor no físico  $p^2 = -\lambda^2 < 0$

$$S_{Rij}(p) = -\frac{\delta_{ij}}{\not{p}}. \quad (3.39)$$

Eso implica que

$$\delta Z = \sigma(-\lambda^2) = \frac{-g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln\left(\frac{\lambda^2}{4\pi\mu^2}\right) \right), \quad (3.40)$$

entonces

$$S_{Rij}(p) = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \left( 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \ln\left(\frac{-p^2}{\lambda^2}\right) \right)^{-1} \quad (3.41)$$

#### Minimal subtraction (MS)

Eliminamos el polo  $\frac{1}{\epsilon}$  en la expresión regularizada. Así

$$\delta Z = \frac{-g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \frac{1}{\epsilon} \quad (3.42)$$

Por lo que

$$S_{Rij}(p) = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \left( 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \left( \gamma - 1 + \ln\left(\frac{-p^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) \right)^{-1} \quad (3.43)$$

**Modified Minimal subtraction ( $\overline{MS}$ )**

Siempre el polo va acompañado con los términos  $\gamma$  y  $\ln(4\pi)$ , así que nos deshacemos de todos esos términos  $\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi)$ . Así

$$\delta Z = \frac{-g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right) \quad (3.44)$$

entonces

$$S_{Rij}(p) = \frac{-\delta_{ij}}{\not{p}} \left( 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} c_F \left( -1 + \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right) \right) \right)^{-1} \quad (3.45)$$

Éste último es el esquema más popular por su facilidad para usarse al calcular con regularización dimensional.

Distintos contratérminos dan lugar a distintos coeficientes de la función beta, por lo que una manera alternativa de definir un esquema es a partir de éstos. Un set  $\{\beta_i^1\}$  define un esquema distinto al set  $\{\beta_i^2\}$  si  $\beta_i^1 \neq \beta_i^2$ . De esta forma lo que haremos será calcular el acoplamiento en distintos esquemas (MOM y 't Hooft) y luego trasladar ese acoplamiento de vuelta al esquema  $\overline{MS}$  mediante ecuaciones de transformación que derivaremos.

**Cálculo MOM**

Esquemas de sustracción de moméntum son definidos estableciendo algunas de las funciones de 2 y 3 puntos a sus valores a tree level para una configuración fija de estados de las partículas externas (esto es momenta y estado de polarización) en un cierto gauge. Eso fija las constantes de renormalización al punto de sustracción  $\mu$ .

Al renormalizar el acoplamiento existe un gran número de posibilidades para definir un esquema de renormalización MOM. Por ejemplo está la ambigüedad de la elección del vértice para sustraer. En general, no es posible fijar más de un vértice a su valor a tree level con  $p^2 = -\mu^2$ , ya que todos ellos están relacionados por identidades de Ward-Slavnov-Taylor (las distintas amplitudes calculadas no son independientes) [32].

Siguiendo a Chetyrkin y Rétey [32], en el gauge de Landau, tenemos que para un esquema MOM en particular (sustracción del vértice gluon-fantasma), con  $n_f = 3$  y  $a \equiv a^{\overline{MS}}$

$$a^{MOM} = a + 2,6875a^2 + 16,8264a^3 + 127,6689a^4. \quad (3.46)$$

### 3.2. ERROR DEBIDO A CAMBIO DE ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN

---

De acá podemos encontrar los valores de los coeficientes de la función beta en este esquema MOM en particular. Por simple regla de la cadena,

$$\beta^M(a^M) = \mu^2 \frac{da^M}{d\mu^2} = \frac{\partial a^M}{\partial a} \mu^2 \frac{da}{d\mu^2} = \frac{\partial a^M}{\partial a} \beta(a), \quad (3.47)$$

con  $\beta^M \equiv \beta^{MOM}$  y  $a^M \equiv a^{MOM}$ .

Si escribimos  $a^M = a + r_1 a^2 + r_2 a^3 + r_3 a^4$  implica que

$$\begin{aligned} & -\beta_1^M (a^M)^2 - \beta_2^M (a^M)^3 - \beta_3^M (a^M)^4 - \beta_4^M (a^M)^5 \\ & = (1 + 2r_1 a + 3r_2 a^2 + 4r_3 a^3)(-\beta_1 a^2 - \beta_2 a^3 - \beta_3 a^4 - \beta_4 a^5) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Resolvemos orden por orden ambos lados de la ecuación en potencias de  $a$  hasta  $a^5$  (notar que el primer lado contiene potencias de hasta  $a^{20}$ ). Con eso obtenemos cuatro ecuaciones, suficientes para obtener  $\beta_1^M$ ,  $\beta_2^M$ ,  $\beta_3^M$  y  $\beta_4^M$ . Los términos de orden superior son afectados por coeficientes de la función beta superiores, los cuales no conocemos. Resolviendo obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_1^M &= \beta_1 = 2,25 \\ \beta_2^M &= \beta_2 = 4 \\ \beta_3^M &= \beta_3 - r_1 \beta_2 + (r_2 - r_1^2) \beta_1 = 20,9184 \\ \beta_4^M &= \beta_4 - 2r_1 \beta_3 + r_1^2 \beta_2 + (2r_3 - 6r_1 r_2 + 4r_1^3) \beta_1 = 160,7726. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Corroboramos la universalidad de los dos primeros términos de la función beta para esquemas de renormalización independientes de masa [33].

Otro esquema popular por la posibilidad de obtener soluciones analíticas (ref), es el ideado por 't Hooft el cual fija los coeficientes de la función beta  $\beta_i = 0$  con  $i > 2$  [34], de esta manera la función beta tiene exactamente la forma de dos loops. Por supuesto los dos primeros coeficientes son los mismos que los de  $\overline{MS}$  ya que el procedimiento descrito en ecuaciones 3.47 y 3.48 sigue siendo válido.

#### Error esquema

Las cantidades físicas en Cromodinámica Cuántica (QCD), o de hecho en cualquier teoría de campos, han de ser independientes del esquema particular usado para renormalizar la teoría. Sin embargo, esta invarianza es respetada sólo aproximadamente en teoría de perturbaciones truncada: dos resultados a orden  $n$  calculados en dos esquemas diferentes, en general diferirán por términos de orden superior

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 + b_1 a_1 + b_2 a_1^2 \dots + b_n a_1^n + O(a_1^{n+1}) \\ R_2 &= 1 + c_1 a_2 + c_2 a_2^2 \dots + c_n a_2^n + O(a_2^{n+1}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

con  $R_1$  y  $R_2$  representando el mismo observable  $R$  calculado en dos esquemas distintos, con parámetros de expansión  $a_1$  y  $a_2$ , y coeficientes  $b_i$  y  $c_i$  respectivamente.

Siempre podemos obtener un acoplamiento en un esquema en función de otro en otro esquema (ver ecn. 3.31 y 3.46) [29], así  $a_1 = a_2 + d_1 a_2^2 + d_2 a_2^3 + \dots$  por lo que

$$R_1 - R_2 = O(a_2^{n+1}) \quad (3.51)$$

por lo que los resultados de cálculos perturbativos en QCD son dependientes de esquema.

Para cuantificar la ambigüedad, extraeremos nuestro acoplamiento en los esquemas MOM y t' Hooft definidos anteriormente para luego, mediante algunas ecuaciones de transformación, volver a nuestro acoplamiento en el esquema  $\overline{MS}$ . Tras esto comparamos con el acoplamiento en  $\overline{MS}$  extraído directamente. La diferencia fundamental en el uso de distintos esquemas, es que tenemos funciones beta diferentes.

Lo primero que obtendremos será la variación del acoplamiento al variar los coeficientes de la función beta. Para simplificar adoptamos la siguiente notación  $\tau = \beta_1 \ln(\mu^2)$ ,  $c_{i-1} = \frac{\beta_i}{\beta_1}$ . Queremos que nuestro acoplamiento sea una función continua de  $\mu$  y los  $\beta_i$ , o sea  $a \equiv a(\tau, c_2, c_3)$ . El teorema de Clairaut establece que para funciones continuas en un dominio y tal que las segundas derivadas existen, las segundas derivadas cruzadas son iguales; entonces imponemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{d\beta_3 d\tau} &= \frac{d^2 a}{d\tau d\beta_3} \\ \frac{d^2 a}{d\beta_4 d\tau} &= \frac{d^2 a}{d\tau d\beta_4} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Suponemos la siguiente expansión para las derivadas

$$\frac{da}{dc_i} = \sum_{j=i+1}^{\infty} k_{ij} a^j, \quad (3.53)$$

exigimos coeficientes  $k_{ij}$  independientes de la escala.

Ayudados por la definición de la función beta, que en estas variables es

$$\frac{da}{d\tau} = -a^2 - c_1 a^3 - c_2 a^4 - c_3 a^5, \quad (3.54)$$

### 3.2. ERROR DEBIDO A CAMBIO DE ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN

---

nuestro trabajo es encontrar los coeficientes  $k_{ij}$ . Calculamos nuestras derivadas cruzadas

$$\frac{d^2 a}{dc_2 d\tau} = \left( \frac{da}{dc_2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial c_2} \right) \left( \frac{da}{d\tau} \right) \\ (k_{23}a^3 + k_{24}a^4 + k_{25}a^5 + k_{26}a^6)(-2a - 3c_1a^2 - 4c_2a^3 - 5c_3a^4 - 6c_4a^5) - a^4, \quad (3.55)$$

$$\frac{d^2 a}{d\tau dc_2} = \left( \frac{da}{d\tau} \frac{\partial}{\partial a} \right) \left( \frac{da}{dc_2} \right) \\ (-a^2 - c_1a^3 - c_2a^4 - c_3a^5)(3k_{23}a^2 + 4k_{24}a^3 + 5k_{25}a^4 + 6k_{26}a^5). \quad (3.56)$$

Imponemos que las dos ecuaciones anteriores sean iguales. Hasta orden  $a^6$  obtenemos que los coeficientes  $k_{ij}$  deben ser

$$\begin{aligned} k_{23} &= 1, \\ k_{24} &= 0, \\ k_{25} &= \frac{1}{3}c_2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

De forma similar, imponiendo la otra condición en la ecuación 3.52, obtenemos

$$\begin{aligned} k_{34} &= \frac{1}{2}, \\ k_{35} &= -\frac{1}{6}c_1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

De esta forma y volviendo a nuestras variables regulares, tenemos que ante un cambio de  $\beta_3$  y  $\beta_4$  nuestro acoplamiento reacciona de la siguiente forma

$$\frac{da}{d\beta_3} = \frac{1}{\beta_1}a^3 + \frac{\beta_3}{3\beta_1^2}a^5, \quad (3.59)$$

$$\frac{da}{d\beta_4} = \frac{1}{2\beta_1}a^4 - \frac{\beta_2}{6\beta_1^2}a^5, \quad (3.60)$$

notamos que a este orden no se cumple  $\frac{d^2 a}{d\beta_3 d\beta_4} = \frac{d^2 a}{d\beta_4 d\beta_3}$  exactamente, por lo que el camino en la resolución de las ecuaciones  $a(\beta_3^R, \beta_4^R) \rightarrow a(\beta_3^{\overline{MS}}, \beta_4^R) \rightarrow a(\beta_3^{\overline{MS}}, \beta_4^{\overline{MS}})$  y  $a(\beta_3^R, \beta_4^R) \rightarrow a(\beta_3^R, \beta_4^{\overline{MS}}) \rightarrow a(\beta_3^{\overline{MS}}, \beta_4^{\overline{MS}})$  da resultados distintos, aunque la diferencia es pequeña. Ocuparemos el promedio del resultado de ambos caminos cuando traslademos nuestro acoplamiento obtenido en nuestro esquema  $R$  a  $\overline{MS}$ .

Ya sabemos como varía el acoplamiento con el esquema. Ahora queremos saber cómo varían los coeficientes  $r_i$  (ver la ecuación siguiente) de la expansión de un observable.

### CAPÍTULO 3. EXTRACCIÓN DE $\alpha_S$

---

En nuestro caso estamos interesados en un observable expandido hasta orden 4 en  $a$

$$R = a(\beta_i) + r_1(\beta_i)a^2(\beta_i) + r_2(\beta_i)a^3(\beta_i) + r_3(\beta_i)a^4(\beta_i) + O(a^5) \quad (3.61)$$

Como un observable no puede depender de esquema necesitamos que  $\frac{dR}{d\beta_i} = 0$ . Usando ecuación 3.51 tenemos que

$$\frac{dR}{d\beta_3} = \frac{da}{d\beta_3} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{dr_1}{d\beta_3} a^2 + \frac{dr_2}{d\beta_3} a^3 + \frac{dr_3}{d\beta_3} a^4 = O(a^5). \quad (3.62)$$

$\frac{da}{d\beta_3}$  ya lo tenemos calculado de la ecuación 3.59. Entonces

$$\frac{dR}{d\beta_3} = \left( \frac{a^3}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{3\beta_1^2} a^5 \right) (1 + 2r_1 a + 3r_2 a^2 + 4r_3 a^3) + \frac{dr_1}{d\beta_3} a^2 + \frac{dr_2}{d\beta_3} a^3 + \frac{dr_3}{d\beta_3} a^4 = O(a^5) \quad (3.63)$$

De la misma forma tenemos

$$\frac{dR}{d\beta_4} = \left( \frac{a^4}{2\beta_1} - \frac{\beta_2}{6\beta_1^2} a^5 \right) (1 + 2r_1 a + 3r_2 a^2 + 4r_3 a^3) + \frac{dr_1}{d\beta_4} a^2 + \frac{dr_2}{d\beta_4} a^3 + \frac{dr_3}{d\beta_4} a^4 = O(a^5) \quad (3.64)$$

con lo que vemos cómo reaccionan nuestros coeficientes  $r_i$  ante un cambio de esquema

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{d\beta_3} &= 0, \\ \frac{dr_2}{d\beta_3} &= -\frac{1}{\beta_1}, \\ \frac{dr_3}{d\beta_3} &= -\frac{2r_1}{\beta_1}, \\ \frac{dr_1}{d\beta_4} &= 0, \\ \frac{dr_2}{d\beta_4} &= 0, \\ \frac{dr_3}{d\beta_4} &= -\frac{1}{2\beta_1}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Resolvemos las ecuaciones anteriores obteniendo

$$\begin{aligned} r_1(\beta_3, \beta_4) &= r_1^{\overline{MS}}, \\ r_2(\beta_3, \beta_4) &= -\frac{1}{\beta_1}(\beta_3 - \beta_3^{\overline{MS}}) + r_2^{\overline{MS}}, \\ r_3(\beta_3, \beta_4) &= -\frac{2r_1}{\beta_1}(\beta_3 - \beta_3^{\overline{MS}}) - \frac{1}{2\beta_1}(\beta_4 - \beta_4^{\overline{MS}}) + r_3^{\overline{MS}}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Podemos ver que mientras el acoplamiento en general aumenta si aumentamos los coeficientes  $\beta_i$ , los coeficientes  $r_i$  en general disminuyen con un incremento de éstos. El



### 3.2. ERROR DEBIDO A CAMBIO DE ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN

---

efecto neto es que el observable queda más o menos inalterado al cambiar entre esquemas.

Aplicamos las ecuaciones anteriores para obtener los coeficientes  $c_{n,1}$  de la función de Adler como función de  $\beta_3$  y  $\beta_4$  (con los cuáles podemos obtener  $c_{n,k}$ ). Observando la ecuación 2.19 vemos que el siguiente observable tiene la expansión

$$\left( \frac{12\pi^2}{N_c} D(Q^2) - 1 \right) = a(Q^2) + c_{2,1}a^2(Q^2) + c_{3,1}a^3(Q^2) + c_{4,1}a^4(Q^2), \quad (3.67)$$

con lo que usando los resultados para  $r_i$  tenemos que los coeficientes  $c_{n,1}$  para cualquier esquema son los siguientes

$$\begin{aligned} c_{2,1} &= \overline{c_{2,1}^{MS}}, \\ c_{3,1} &= \overline{c_{3,1}^{MS}} - \frac{1}{\beta_1}(\beta_3 - \beta_3^{\overline{MS}}), \\ c_{4,1} &= \overline{c_{4,1}^{MS}} - \frac{2}{\beta_1}c_{2,1}(\beta_3 - \beta_3^{\overline{MS}}) - \frac{1}{2\beta_1}(\beta_4 - \beta_4^{\overline{MS}}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Recordando que  $\beta_3^{MOM} = 20,918$ ,  $\beta_4^{MOM} = 160,773$  y que  $\beta_3'^{tHooft} = \beta_4'^{tHooft} = 0$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} c_{3,1}^{MOM} &= 1,545; \quad c_{4,1}^{MOM} = 8,015, \\ c_{4,1}'^{tHooft} &= 10,842; \quad c_{4,1}'^{tHooft} = 74,236. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Vemos la ecuación 2.24 y observamos que todos los otros coeficientes quedan inalterados excepto  $c_{4,2}$ , tenemos que

$$\overline{c_{4,2}^{MS}} = -33,092; \quad c_{4,2}^{MOM} = -22,234; \quad c_{4,2}'^{tHooft} = -43,152. \quad (3.70)$$

Teniendo lo anterior podemos extraer  $\alpha_s(m_\tau^2)$  en los distintos esquemas. Recordamos que

$$\delta_{FO}^{(0)} = \sum_{n=1}^4 a(m_\tau^2)^n \sum_{k=1}^n k c_{n,k} J_{k-1}, \quad (3.71)$$

con  $J_l = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) \ln^l(-x)$ . Al extraer en los distintos esquemas lo único que cambia son los coeficientes  $c_{n,k}$ , el procedimiento es el mismo que el descrito en página 17. Así obtenemos en los diferentes esquemas considerados

$$\begin{aligned} \delta_{FO, \overline{MS}}^{(0)} &= a^{\overline{MS}} + 5,2025(a^{\overline{MS}})^2 + 26,3672(a^{\overline{MS}})^3 + 127,0821(a^{\overline{MS}})^4 \quad (3.72) \\ \delta_{FO, MOM}^{(0)} &= a^{MOM} + 5,2025(a^{MOM})^2 + 21,5412(a^{MOM})^3 + 51,6357(a^{MOM})^4 \\ \delta_{FO, 'tHooft}^{(0)} &= a'^{tHooft} + 5,2025(a'^{tHooft})^2 + 30,8382(a'^{tHooft})^3 + 184,0947(a'^{tHooft})^4 \end{aligned}$$

### CAPÍTULO 3. EXTRACCIÓN DE $\alpha_S$

Por supuesto podríamos haber utilizado las ecuaciones de transformación en los coeficientes de  $\delta_{FO, \overline{MS}}^{(0)}$  directamente (ecn. 3.5) para obtener  $\delta_{FO, MOM}^{(0)}$  y  $\delta_{FO, 'tHooft}^{(0)}$ . De esa forma da prácticamente el mismo resultado.

Igualando  $\delta_{FO, R}^{(0)} = \delta_{exp}^{(0)}$  obtenemos los siguientes valores para nuestros acoplamientos

$$\begin{aligned}\alpha_{FO}^{\overline{MS}} &= 0,326 \\ \alpha_{FO}^{MOM} &= 0,340 \\ \alpha_{FO}^{'tHooft} &= 0,316\end{aligned}\tag{3.73}$$

Éstos acoplamientos no son comparables directamente pues no son cantidades físicas, éstas pueden variar de esquema en esquema. Para hacer la comparación usaremos las ecuaciones 3.59 y 3.60 para trasladar nuestros acoplamientos a  $\overline{MS}$  desde los otros esquemas. Así

$$\alpha_{FO}^{MOM} = 0,340 \rightarrow \alpha_{FO}^{\overline{MS}} = 0,314,\tag{3.74}$$

$$\alpha_{FO}^{'tHooft} = 0,316 \rightarrow \alpha_{FO}^{\overline{MS}} = 0,336.\tag{3.75}$$

Vemos que en el primer caso obtenemos un valor de 0,012 inferior al valor de  $\alpha_{\overline{MS}}$  extraído directamente, y en el segundo un valor de 0,010 superior. Como criterio tomaremos la mayor diferencia obtenida como representativo del error debido a esquema, en el entendido que hay muchos otros esquemas no tomados en cuenta aquí y que formalmente se encuentran en el mismo pie respecto a éstos. Así

$$\Delta\alpha_{esquema}^{FO} = 0,012.\tag{3.76}$$

En el caso de  $CI$  para extraer  $\alpha_s(m_\tau^2)$  recordamos que

$$\delta_{CI}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} J_n^a(m_\tau^2),\tag{3.77}$$

con  $J_n^a(m_\tau^2) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x)^n a^n(-m_\tau^2 x)$ . En este enfoque la diferencia entre los distintos esquemas proviene de que los coeficientes  $c_{n,1}$  cambian y  $a(-m_\tau^2 x)$  cumple una ecuación del grupo de renormalización diferente. Así

$$\delta_{CI, \overline{MS}}^{(0)} = J_1^a(m_\tau^2) + 1,640 J_2^a(m_\tau^2) + 6,371 J_3^a(m_\tau^2) + 49,076 J_4^a(m_\tau^2)\tag{3.78}$$

$$\delta_{CI, MOM}^{(0)} = J_1^a(m_\tau^2) + 1,640 J_2^a(m_\tau^2) + 1,545 J_3^a(m_\tau^2) + 8,015 J_4^a(m_\tau^2)$$

$$\delta_{CI, 'tHooft}^{(0)} = J_1^a(m_\tau^2) + 1,640 J_2^a(m_\tau^2) + 10,842 J_3^a(m_\tau^2) + 74,236 J_4^a(m_\tau^2)$$

### 3.3. ERROR DEBIDO A LA ELECCIÓN DEL PUNTO DE SUSTRACCIÓN

---

Igualando la ecuación anterior a  $\delta_{exp}^{(0)}$  extraemos

$$\begin{aligned}\alpha_{CI}^{\overline{MS}} &= 0,347, \\ \alpha_{CI}^{MOM} &= 0,383, \\ \alpha_{CI}^{'tHooft} &= 0,329.\end{aligned}\tag{3.79}$$

De la misma forma a como lo hacemos en FO, trasladamos nuestros acoplamientos anteriores a  $\alpha^{\overline{MS}}$

$$\alpha_{CI}^{MOM} = 0,383 \rightarrow \alpha_{FO}^{\overline{MS}} = 0,345,\tag{3.80}$$

$$\alpha_{CI}^{'tHooft} = 0,329 \rightarrow \alpha_{FO}^{\overline{MS}} = 0,351.\tag{3.81}$$

Con lo que podemos decir que

$$\Delta\alpha_{esquema}^{CI} = 0,004.\tag{3.82}$$

Observamos que FO es el triple de sensible a un cambio de esquema que CI.

### 3.3. Error debido a la elección del punto de sustracción

Así como un observable no puede depender de la elección de esquema, tampoco puede depender de la elección del punto de sustracción  $\mu$ , ya que éste es un parámetro no físico que aparece en el proceso de regularización dimensional al renormalizar. Para un observable general

$$\begin{aligned}R(Q^2) = & a(\mu^2) + r_1(Q^2, \mu^2)a^2(\mu^2) + r_2(Q^2, \mu^2)a^3(\mu^2) + r_3(Q^2, \mu^2)a^4(\mu^2), \\ & a(\mu^2, Q^2) + r_1(\mu^2)a^2(\mu^2, Q^2) + r_2(\mu^2)a^3(\mu^2, Q^2) + r_3(\mu^2)a^4(\mu^2, Q^2),\end{aligned}\tag{3.83}$$

queremos ver como varían nuestros coeficientes  $r_i$  al variar la escala. Ya sabemos como varía  $a \equiv a(\mu^2)$  con la escala, mediante la función beta. El valor de un observable no puede depender de la elección del punto de sustracción, lo que implica que  $\frac{dR}{d\log\mu^2} = 0$ . Entonces

$$\frac{\partial R}{\partial \log(\mu^2)} = (1+2ar_1+3a^2r_2+4a^3r_3)\frac{\partial a}{\partial \log(\mu^2)} + \frac{\partial r_1}{\partial \log(\mu^2)}a^2 + \frac{\partial r_2}{\partial \log(\mu^2)}a^3 + \frac{\partial r_3}{\partial \log(\mu^2)}a^4 = O(a^5)\tag{3.84}$$

Recordamos la definición de la función beta y obtenemos

$$-\beta_1 a^2 - \beta_2 a^3 - \beta_3 a^4 - 2r_1 \beta_1 a^3 - 2r_1 \beta_2 a^4 - 3r_2 \beta_1 a^4 + \frac{\partial r_1}{\partial \log(\mu^2)} a^2 + \frac{\partial r_2}{\partial \log(\mu^2)} a^3 + \frac{\partial r_3}{\partial \log(\mu^2)} a^4 + O(a^5) = O(a^5), \quad (3.85)$$

para que se cumpla lo anterior necesitamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \log(\mu^2)} &= \beta_1, \\ \frac{\partial r_2}{\partial \log(\mu^2)} &= \beta_2 + 2r_1 \beta_1, \\ \frac{\partial r_3}{\partial \log(\mu^2)} &= \beta_3 + 2r_1 \beta_2 + 3r_2 \beta_1. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Resolvemos las ecuaciones anteriores en términos de valores de referencia de los coeficientes a cierta escala  $\nu$ . Así obtenemos

$$r_1(\mu^2) = r_1(\nu^2) + \beta_1 \log\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right), \quad (3.87)$$

$$r_2(\mu^2) = r_2(\nu^2) + (\beta_2 + 2\beta_1 r_1(\nu^2)) \log\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right) + \beta_1^2 \log^2\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right), \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} r_3(\mu^2) &= r_3(\nu^2) + (\beta_3 + 2\beta_2 r_1(\nu^2) + 3\beta_1 r_2(\nu^2)) \log\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{5}{2}\beta_1 \beta_2 + 3\beta_1^3 r_1(\nu^2)\right) \log^2\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right) + \beta_1^3 \log^3\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Las ecuaciones anteriores provienen de cálculos hasta cierto orden en teoría de perturbaciones, por lo cuál es sólo aproximada. De hecho, de esta forma podemos reencontrar FO en base a CI. Viendo la ecuación 3.61, podemos ver que la dependencia con la escala (ésta vez física, no el punto de sustracción) de un observable podemos achacársela a los coeficientes  $c_i(\mu^2, Q^2)$  manteniendo el acoplamiento fijo  $a(\mu^2)$  -Ésto es teoría de perturbaciones fija FO-, o podemos hacerlo con el acoplamiento  $a(Q^2)$  manteniendo los coeficientes fijos -Ésto es llamado teoría de perturbaciones mejorada CI-. Partiendo de lo último, vemos que la función de Adler escrita en CI es

$$\frac{12\pi^2}{N_c} (D(Q^2) - 1) = c_{1,1} a(Q^2) + c_{2,1} a^2(Q^2) + c_{3,1} a^3(Q^2) + c_{4,1} a^4(Q^2). \quad (3.90)$$

Si reescribimos lo anterior borrando la dependencia en  $Q^2$  en el acoplamiento, y poniéndola en los coeficientes, obtenemos lo siguiente

### 3.3. ERROR DEBIDO A LA ELECCIÓN DEL PUNTO DE SUSTRACCIÓN

---

$$\begin{aligned}
& c_{1,1}a(\mu^2) + \left(c_{2,1}(Q^2) + \beta_1 \log\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right) a^2(\mu^2) \\
& + \left(c_{3,1}(Q^2) + (\beta_2 + 2\beta_1 c_{2,1}(Q^2)) \log\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) + \beta_1^2 \log^2\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right) a^3(\mu^2) \\
& \quad \left(c_{4,1}(Q^2) + (\beta_3 + 2\beta_2 c_{2,1}(Q^2) + 3\beta_1 c_{3,1}(Q^2)) \log\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right. \\
& \quad \left.+ \left(\frac{5}{2}\beta_2 \beta_1 + 3\beta_1^2 c_{2,1}(Q^2)\right) \log^2\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) + \beta_1^3 \log^3\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right) a^4(\mu^2)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

En lo anterior usamos  $\nu^2 = Q^2$  para la evolución de los coeficientes. Eligiendo el acoplamiento fijo en lo anterior  $\mu^2 = m_\tau^2$  obtenemos justamente la función de Adler escrita en FO y podemos identificar de la expansión los coeficientes  $c_{n,k}$  que coinciden con los calculados previamente.

Como criterio para tomar un error debido a la elección del punto de sustracción variaremos  $\mu$  entre  $0,8m_\tau$  y  $1,2m_\tau$ .

Para FO recordamos que en  $\overline{MS}$  (todo nuestro análisis es en este esquema)

$$\delta_{FO}^{(0)}(m_\tau^2) = a(m_\tau^2) + 5,203a^2(m_\tau^2) + 26,367a^3(m_\tau^2) + 127,082a^4(m_\tau^2), \tag{3.92}$$

entonces nuestros coeficientes son  $r_i(\mu^2, Q^2)$  (En este caso decimos  $Q^2 = m_\tau^2$  y no  $Q^2 = -m_\tau^2 x$  como sería en la función de Adler pues esta última está integrada en  $\delta^{(0)}$ . En  $D_{FO}$  los coeficientes dependen de  $Q^2$  vía los logaritmos  $r_n(m_\tau^2, -m_\tau^2 x) = \sum_{k=1}^n c_{n,k} \log^{k-1}(-x)$ )

$$\begin{aligned}
r_1(\mu^2 = m_\tau^2, Q^2 = m_\tau^2) &= 5,203, \\
r_2(\mu^2 = m_\tau^2, Q^2 = m_\tau^2) &= 26,367, \\
r_3(\mu^2 = m_\tau^2, Q^2 = m_\tau^2) &= 127,082.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Al variar la escala a  $(\xi m_\tau)^2$ ,  $\delta_{FO}^{(0)}$  varía de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta_{FO}^{(0)}(m_\tau^2) &= a((\xi m_\tau)^2) + r_1((\xi m_\tau)^2, m_\tau^2) a^2((\xi m_\tau)^2) + r_2((\xi m_\tau)^2, m_\tau^2) a^3((\xi m_\tau)^2) \\
&\quad + r_3((\xi m_\tau)^2, m_\tau^2) a^4((\xi m_\tau)^2).
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Para  $\xi = 0,8$  obtenemos el siguiente valor de los coeficientes  $r_1 = 4,198$ ,  $r_2 = 15,142$ ,  $r_3 = 43,795$  con lo que extraemos  $\alpha_s(\xi m_\tau^2)$  al igualar a nuestro  $\delta_{exp}^{(0)}$ . Luego evolucionamos mediante la función beta (ecn. 2.22) y obtenemos el acoplamiento a la escala de nuestro interés  $\alpha_s(m_\tau^2)$

### CAPÍTULO 3. EXTRACCIÓN DE $\alpha_S$

---

$$\alpha_s((0,8m_\tau)^2) = 0,364 \rightarrow \alpha_s(m_\tau^2) = 0,317. \quad (3.95)$$

De la misma forma para  $\xi = 1,2$  obtenemos  $r_1 = 6,023$ ,  $r_2 = 37,036$ ,  $r_3 = 224,875$  lo que implica que

$$\alpha_s((1,2m_\tau)^2) = 0,302 \rightarrow \alpha_s(m_\tau^2) = 0,335, \quad (3.96)$$

por lo que al variar el punto de sustracción en este intervalo razonable tenemos una diferencia de 0,009 con el valor extraído con  $\xi = 1$ . Usaremos este criterio para error al variar la escala. Así

$$\Delta\alpha_{s,escala}^{FO} = 0,009. \quad (3.97)$$

Para CI el procedimiento es similar. En este caso tomaremos como nuestro observable la función de Adler (Esto se puede hacer también para FO obteniéndose resultados casi idénticos a los ya calculados). Viendo la ecuaciones 3.91 y 2.20, tenemos que nuestros coeficientes a la escala  $m_\tau^2$  son  $c_{2,1} = 1,640$ ,  $c_{3,1} = 6,371$  y  $c_{4,1} = 49,076$ . Ocupando las ecuaciones de evolución de nuestros coeficientes obtenemos  $c_{2,1}((0,8m_\tau)^2) = 0,636$ ,  $c_{3,1}((0,8m_\tau)^2) = 2,301$ ,  $c_{4,1}((0,8m_\tau)^2) = 27,969$ ; y  $c_{2,1}((1,2m_\tau)^2) = 2,460$ ,  $c_{3,1}((1,2m_\tau)^2) = 11,194$ ,  $c_{4,1}((1,2m_\tau)^2) = 80,065$ .

Podemos comprobar nuestro resultado anterior para  $c_{n,1}((\xi m_\tau)^2)$  de la siguiente forma. Tenemos que

$$D_V^{(1)}(m_\tau^2 x) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a(\mu^2)^n \sum_{k=0}^{n+1} k c_{n,k} \log^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right). \quad (3.98)$$

En CI resumamos los logaritmos punto por punto en el círculo  $x = -e^{i\theta}$ , así  $\mu^2 = -m_\tau^2 x$ , con lo que obtenemos

$$D_V^{(1)}(m_\tau^2 x) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,1}(m_\tau^2) a^n(-m_\tau^2 x), \quad (3.99)$$

en lo anterior  $c_{n,1}((\xi m_\tau)^2) \equiv c_{n,1}(\mu^2 = -(\xi m_\tau)^2 x, Q^2 = -m_\tau^2 x)$  y  $c_{n,1}(m_\tau^2) \equiv c_{n,1}$  para retomar la notación de la ecuación 2.19. Así al ver la dependencia de la escala en lo anterior tenemos

$$\frac{12\pi^2}{N_c} (D(m_\tau^2 x) - 1) = \sum_{n=1}^4 c_{n,1}((\xi m_\tau)^2) a^n(-(\xi m_\tau)^2 x), \quad (3.100)$$

estos coeficientes dependientes de la escala  $c_{n,1}((\xi m_\tau)^2, m_\tau^2)$  ya fueron calculados en la ecuación 3.91 (ver también ecuaciones 3.87, 3.88, 3.89 y 3.90). Los comprobamos notando que al sustraer en  $\mu^2 = -(\xi m_\tau)^2 x$  en ecuación 2.94 tenemos que

### 3.3. ERROR DEBIDO A LA ELECCIÓN DEL PUNTO DE SUSTRACCIÓN

$$\frac{12\pi^2}{N_c}(D(m_\tau^2 x) - 1) = \sum_{n=1}^4 a^n (-\xi m_\tau)^2 x \sum_k^n k c_{n,k} \log\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad (3.101)$$

con lo que

$$c_{n,1}((\xi m_\tau)^2) = \sum_k^n k c_{n,k} \log^{k-1}\left(\frac{1}{\xi^2}\right). \quad (3.102)$$

Esto da el mismo resultado que lo obtenido anteriormente (ecn. 3.91), lo que nos sirve de comprobación a lo hecho. Para hacerlo explícito comprobaremos el valor de  $c_{3,1}((\xi m_\tau)^2)$ , la comprobación de los demás coeficientes se hace de forma similar.

Tenemos según lo anterior

$$c_{3,1}((\xi m_\tau)^2) = c_{3,1} + 2c_{3,2} \log\left(\frac{1}{\xi^2}\right) + 3c_{3,3} \log^2\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad (3.103)$$

usando ecuaciones 2.24 obtenemos

$$c_{3,1}(\xi m_\tau^2) = c_{3,1} + (\beta_2 + 2\beta_1 c_{2,1}) \log(\xi^2) + \beta_1^2 \log^2(\xi^2), \quad (3.104)$$

resultado que coincide a lo calculado con anterioridad (ver ecuaciones 3.88 y 3.91).

Después de este pequeño paréntesis seguimos con el cálculo de la variación de  $\alpha_s^{CI}$  con la escala.

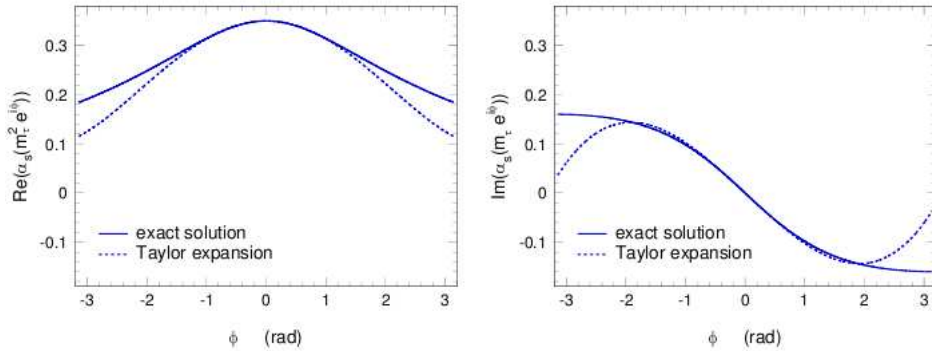


Figura 3.1: Comparación entre la solución exacta (numérica) de  $\alpha(m_\tau^2 e^{i\phi})$  y su expansión a cuarto orden en Taylor, en el círculo  $\phi = -\pi.. \pi$  [35]. El ejemplo usa  $\alpha(m_\tau^2) = 0,35$

Teníamos que

$$\begin{aligned}\delta_{CI}^{(0)} &= \sum_{n=1}^4 c_{n,1} J_n^a(m_\tau^2); \\ J_n^a(m_\tau^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1 + 2e^{i\theta} - 2e^{3i\theta} - e^{4i\theta}) a^n (m_\tau^2 e^{i\theta}),\end{aligned}\quad (3.105)$$

como es usual para extraer  $\alpha_s$  imponemos que lo anterior sea igual a  $\delta_{exp}^{(0)}$ .

Al variar la escala tenemos que

$$\delta_{CI}^{(0)}(m_\tau^2) = \sum_{n=1}^4 c_{n,1} ((\xi m_\tau)^2, m_\tau^2) J_n^a((\xi m_\tau)^2), \quad (3.106)$$

usando exactamente el mismo procedimiento hecho en FO obtenemos para  $\xi = 0,8$

$$\alpha_s((0,8m_\tau)^2) = 0,401 \rightarrow \alpha_s(m_\tau^2) = 0,343, \quad (3.107)$$

y para  $\xi = 1,2$

$$\alpha_s((1,2m_\tau)^2) = 0,316 \rightarrow \alpha_s(m_\tau^2) = 0,353, \quad (3.108)$$

con el mismo criterio usado antes

$$\Delta\alpha_{s,escala}^{CI} = {}^{+0,006}_{-0,004} \quad (3.109)$$

Habiendo calculado todo lo anterior, tenemos que los valores extraídos de  $\alpha_s$  en los distintos enfoques son

$$\begin{aligned}\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) &= 0,326 \pm 0,009_{escala} \pm 0,004_{exp} \pm 0,007_{trun} \pm 0,012_{esquema}, \\ \alpha_s^{FO}(m_\tau^2) &= 0,326 \pm 0,017\end{aligned}\quad (3.110)$$

y

$$\begin{aligned}\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) &= 0,347 {}^{+0,006}_{-0,004}|_{escala} \pm 0,005_{exp} \pm 0,002_{trun} \pm 0,004_{esquema} \\ \alpha_s^{CI}(m_\tau^2) &= 0,347 {}^{+0,009}_{-0,008},\end{aligned}\quad (3.111)$$

donde los errores se añadieron en cuadratura.

En muchos papers se toma un promedio de los valores extraídos en CI y FO cómo el valor final para  $\alpha_s$ . Nosotros no haremos eso, sino que nos decidiremos directamente por el valor dado por CI por las siguientes razones:



### 3.3. ERROR DEBIDO A LA ELECCIÓN DEL PUNTO DE SUSTRACCIÓN

---

1.- En FO  $\alpha(m_\tau^2 e^{i\theta})$  ha sido expandida en Taylor y términos mayores que el orden dado FO han sido truncados.

2.- Esa expansión de Taylor en términos de  $\alpha(m_\tau^2)$  es usada para predecir  $\alpha(m_\tau^2 e^{i\theta})$  en todo el contorno. Cómo podemos ver en el cuadro 3.1, ésta expansión se comporta pobremente para  $\theta$  lejano a 0.

3.- Como podemos ver en la figura 3.1, CI presenta una mejor convergencia que FO, lo que puede ser visualizado en un menor error por truncación. Además, por las mismas razones, el resultado CI resulta ser menos sensible a cambios de esquema y punto de sustracción, dando una estimación más estable y fiable de  $\alpha_s(m_\tau^2)$ .



## Capítulo 4

# Teoría de Perturbaciones Mejorada en el Contorno Modificada (MCI)

En este capítulo motivaremos y discutiremos una modificación a CI.

Teníamos como una de las primeras expresiones para  $R_\tau$  la siguiente integral

$$R_\tau = 6\pi i \oint_{|x|=1} dx (1-x)^2 (1+2x) \Pi^{(1)}(m_\tau^2 x). \quad (4.1)$$

Luego integrábamos por partes y obteníamos la fórmula estándar para  $R_\tau$

$$R_\tau = -3\pi i \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) D^{(1)}(m_\tau^2 x). \quad (4.2)$$

No hay razón alguna para parar ahí. Podemos seguir integrando por partes la expresión anterior. Si definimos el observable  $E(x)$  de la siguiente manera

$$E(x) = x \frac{dD(x)}{dx}, \quad (4.3)$$

podemos obtener, por ejemplo, fácilmente la siguiente expresión alternativa para  $R_\tau$

$$R_\tau = -3\pi i \left[ \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 D^{(1)}(m_\tau^2 x) + \oint_{|x|=1} \frac{dx}{4x} (1-x)^4 E^{(1)}(m_\tau^2 x) \right]. \quad (4.4)$$

Las expresiones anteriores en principio están en el mismo pie y en cierto sentido la última es preferida a las otras pues contiene una supresión de orden 4 cerca de  $x = 1$ , ya

## CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)

---

que sabemos la validez del OPE en el corte es dudosa.

Teníamos que

$$D(m_\tau^2 x) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=1}^{n+1} k c_{n,k} \log^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right). \quad (4.5)$$

De la definición (y teniendo en cuenta las restricciones sobre los coeficientes explicadas en página 8)

$$E(m_\tau^2 x) = \frac{N_c}{12\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=2}^n k(k-1) c_{n,k} \log^{k-2} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right). \quad (4.6)$$

Si desarrollamos la expresión alternativa, separando explícitamente el término  $n = 0$  de los otros, obtenemos

$$\begin{aligned} R_\tau = & \frac{N_c}{2} \left( 1 + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 \log^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=2}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=2}^n k(k-1) c_{n,k} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{4x} (1-x)^4 \log^{k-2} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observando la ecuación 2.16 aislamos la corrección perturbativa de QCD

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} = & \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 \log^{k-1} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=2}^{\infty} a^n(\mu^2) \sum_{k=2}^n k(k-1) c_{n,k} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{4x} (1-x)^4 \log^{k-2} \left( \frac{-m_\tau^2 x}{\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

De la misma forma que hicimos antes evaluamos la serie anterior con la opción de acoplamiento fijo  $\mu^2 = m_\tau^2$  obteniendo la expresión en FO

$$\delta_{FO}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n(m_\tau^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} H_{k-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a^n(m_\tau^2) \sum_{k=2}^n k(k-1) c_{n,k} I_{k-2}, \quad (4.9)$$

con

$$\begin{aligned} H_l &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 \log^l(-x) \\ I_l &= \frac{1}{8\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^4 \log^l(-x). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De la nueva definición de  $\delta_{FO}^{(0)}$  podemos extraer nuevamente  $\alpha_s^{FO}$  igualando a  $\delta_{exp}^{(0)}$ . En este caso tenemos un término adicional en la expansión de  $\delta_{FO}^{(0)}$ , el dado por los coeficientes  $c_{5,k}$  en la segunda sumatoria<sup>1</sup>. Estos términos pueden ser leídos en la

---

<sup>1</sup>Si conocemos la expansión para  $D(m_\tau^2 x)$  hasta orden  $a^4$ , entonces conocemos la expansión para  $E(m_\tau^2 x)$  hasta orden  $a^5$

---

ecuación 2.24, nos damos cuenta que están conformados por otros términos conocidos (el único término no conocido es el  $c_{5,1}$  el cuál no aparece en la segunda sumatoria). Si no consideráramos los términos  $c_{5,k}$  obtendríamos el mismo resultado que al calcular con la expresión original para  $\delta_{FO}^{(0)}$  ya que de ésta forma  $E(x)$  sería exactamente la derivada logarítmica de  $D(x)$  al orden calculado ( $n = 4$ ). La única forma de reconciliar los resultados en éstas dos expansiones (y en otras posibles) es siempre cortar en el mismo orden en ambas sumatorias (en este caso  $n = 4$ ), pero al hacer eso estamos perdiendo información pues los términos  $c_{5,k}$  sí son conocidos en la segunda sumatoria. Esto sigue y sigue término por término pues si conociéramos el término  $c_{5,1}$  en la primera sumatoria, inmediatamente conoceríamos los términos  $c_{6,k}$  en la segunda.

Entonces, la expansión alternativa para  $\delta_{FO}^{(0)}$  nos da el siguiente resultado

$$\delta_{FO}^{(0)} = a(m_\tau^2) + 5,2025a^2(m_\tau^2) + 26,3672a^3(m_\tau^2) + 127,0821a^4(m_\tau^2) - 849,1704a^5(m_\tau^2), \quad (4.11)$$

con lo que extraemos  $\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) = 0,337$ .

Ahora veamos el caso de CI. Acá resumamos los logaritmos de la ecuación 4.8 extrayendo en  $\mu^2 = Q^2 = -m_\tau^2 x$  (ver ecuaciones 2.19 y 2.32), así

$$\delta_{CI}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} H_n^a(m_\tau^2) + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_{n,2} I_n^a(m_\tau^2), \quad (4.12)$$

con

$$\begin{aligned} H_n^a(m_\tau^2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 a^n (-m_\tau^2 x) \\ I_n^a(m_\tau^2) &= \frac{1}{8\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^4 a^n (-m_\tau^2 x). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Al igual que en FO en la primera sumatoria (la que tiene que ver con  $D(m_\tau^2 x)$ ) conocemos los coeficientes hasta  $n = 4$ , mientras que en la segunda (la cual tiene que ver con  $E(m_\tau^2 x)$ ) conocemos hasta  $n = 5$ . De la misma forma que antes extraemos el acoplamiento obteniendo  $\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) = 0,343$ .

La expansión anterior para  $R_\tau$  no es única ni privilegiada, podemos seguir contruyendo ilimitadamente otras expresiones vía integración por partes. Presentaremos brevemente otras posibles expansiones y extraeremos  $\alpha_s$ . Por supuesto el procedimiento es similar a lo ya expuesto.

**CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)**

---

$$R_\tau = -3\pi i \left( \oint_{|x|=1} \frac{dx}{4x^2} (1-x)^4 (E(m_\tau^2 x) - D(m_\tau^2 x)) + \oint_{|x|=1} \frac{dx}{4x} (1-x)^4 E(m_\tau^2 x) \right). \quad (4.14)$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} \delta_{FO}^{(0)} &= \sum_{n=2}^5 a^n(m_\tau^2) \sum_{k=2}^n k(k-1) c_{n,k} (M_{k-2} + I_{k-2}) - \sum_{n=1}^4 a^n(m_\tau^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} M_{k-1} \\ \delta_{CI}^{(0)} &= \sum_{n=2}^5 2c_{n,2} (M_n^a(m_\tau^2) + I_n^a(m_\tau^2)) - \sum_{n=1}^4 c_{n,1} M_n^a(m_\tau^2), \end{aligned} \quad (4.15)$$

con

$$\begin{aligned} M_l &\equiv \frac{1}{8\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x^2} (1-x)^4 \ln^l(-x) \\ M_n^a(m_\tau^2) &\equiv \frac{1}{8\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x^2} (1-x)^4 a^n(-m_\tau^2 x). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Extrayendo obtenemos  $\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) = 0,323$  y  $\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) = 0,346$ .

De la misma forma

$$R_\tau = \frac{3\pi i}{10} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x^2} (1-x)^4 (3+2x) (D(m_\tau^2 x) - E(m_\tau^2 x)), \quad (4.17)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \delta_{FO}^{(0)} &= \sum_{n=1}^4 a^n(m_\tau^2) \sum_{k=1}^n k c_{n,k} A_{k-1} - \sum_{n=2}^5 a^n(m_\tau^2) \sum_{k=2}^n k(k-1) c_{n,k} A_{k-2} \\ \delta_{CI}^{(0)} &= \sum_{n=1}^4 c_{n,1} A_n^a(m_\tau^2) - 2 \sum_{n=2}^5 c_{n,2} A_n^a(m_\tau^2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$\begin{aligned} A_l &\equiv -\frac{1}{20\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x^2} (1-x)^4 (3+2x) \ln^l(-x) \\ A_n^a(m_\tau^2) &\equiv -\frac{1}{20\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x^2} (1-x)^4 (3+2x) a^n(-m_\tau^2 x), \end{aligned} \quad (4.19)$$

de lo que extraemos  $\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) = 0,318$  y  $\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) = 0,348$ .

Vemos que hay una ambigüedad en la evaluación de  $\delta^{(0)}$  según cómo integremos, debido a que después de usar el grupo de renormalización  $E(m_\tau^2 x)$  no es exactamente la derivada logarítmica de  $D(m_\tau^2 x)$ . Debido a esto tenemos diferentes valores extraídos para  $\alpha_s^{FO}$  y  $\alpha_s^{CI}$ . Por las razones expuestas al final del capítulo anterior, ahora nos ocuparemos de resolver esta ambigüedad para CI. Esto lo logramos modificando CI,

---

implementando un método que llamaremos Teoría de Perturbaciones Mejorada en el Contorno Modificada (MCI) [6].

Como vimos, el problema de por qué las distintas expansiones dan resultados distintos es debido a que después de ocupar el grupo de renormalización  $E(m_\tau^2 x)$  no es exactamente la derivada logarítmica de  $D(m_\tau^2 x)$ . Una posible solución a esto, es considerar una expansión en derivadas de  $a$  en vez de en potencias de ella. Esta expansión fue introducida en [36] en el contexto de QCD analítica. Recordemos la definición de la función beta

$$\frac{da}{d\log\mu^2} = -\beta_1 a^2(\mu^2) - \beta_2 a^3(\mu^2) - \beta_3 a^4(\mu^2) - \beta_4 a^5(\mu^2). \quad (4.20)$$

Definimos

$$a_2 = \frac{-1}{\beta_1} \frac{da}{d\log\mu^2} = a^2(\mu^2) + \frac{\beta_2}{\beta_1} a^3(\mu^2) + \frac{\beta_3}{\beta_1} a^4(\mu^2) + \frac{\beta_4}{\beta_1} a^5(\mu^2) \quad (4.21)$$

De forma similar definimos  $a_3$ ,  $a_4$  y  $a_5$ ; que en ésta expansión tomarán el rol de  $a^3$ ,  $a^4$  y  $a^5$  respectivamente.

Veamos el valor de la segunda derivada de la función beta

$$\frac{d^2 a}{d(\log\mu^2)^2} = \frac{da}{d\log\mu^2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{da}{d\log\mu^2} \right) = 2\beta_1^2 a^3 + 5\beta_1\beta_2 a^4 + (3\beta_2^2 + 6\beta_1\beta_3) a^5 + \dots, \quad (4.22)$$

dónde sólo conservamos términos hasta orden 5.

Así como lo hicimos antes definimos

$$a_3 = \frac{1}{2\beta_1^2} \frac{d^2 a}{d(\log\mu^2)^2} = a^3(\mu^2) + \frac{5\beta_2}{2\beta_1} a^4(\mu^2) + \left( \frac{3\beta_2^2}{2\beta_1^2} + \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) a^5(\mu^2) + \dots \quad (4.23)$$

Es fácil darse cuenta que nuestros términos de expansión  $a_i$  serán

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\beta_1^{n-1}} \frac{d^{n-1} a(\mu^2)}{d(\log\mu^2)^{n-1}} \quad (4.24)$$

La nueva expansión es de la forma  $\sum \tilde{c}_n a_n$ . Para que nuestras expansiones sean perturbativamente equivalentes necesitamos que

$$\frac{12\pi^2}{N_c} (D(m_\tau^2 x) - 1) = \sum_{n=1}^4 c_{n,1} a^n(-m_\tau^2 x) = \sum_{n=1}^4 \tilde{c}_{n,1} a_n(-m_\tau^2 x) + O(a^5) \quad (4.25)$$

**CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)**

---

$$\frac{12\pi^2}{N_c} E(m_\tau^2 x) = \sum_{n=2}^5 2c_{n,2} a^n(-m_\tau^2 x) = \sum_{n=2}^5 2\tilde{c}_{n,2} a_n(-m_\tau^2 x) + O(a^6) \quad (4.26)$$

Eso nos fija los coeficientes  $\tilde{c}_{n,i}$  con  $i = 1, 2$ . Por conveniencia posterior calcularemos hasta el coeficiente que acompaña a  $a_5$  en una expansión general.

$$R = 1 + r_1 a + r_2 a^2 + r_3 a^3 + r_4 a^4 + r_5 a^5 = 1 + \tilde{r}_1 a + \tilde{r}_2 a^2 + \tilde{r}_3 a^3 + \tilde{r}_4 a^4 + \tilde{r}_5 a^5 + O(a^6). \quad (4.27)$$

Tenemos que según la definición (ecn. 4.24) y hasta orden  $a^5$

$$\begin{aligned} a_1(-m_\tau^2 x) &= a(-m_\tau^2 x) \\ a_2(-m_\tau^2 x) &= a^2(-m_\tau^2 x) + \frac{\beta_2}{\beta_1} a^3(-m_\tau^2 x) + \frac{\beta_3}{\beta_1} a^4(-m_\tau^2 x) + \frac{\beta_4}{\beta_1} a^5(-m_\tau^2 x) \\ a_3(-m_\tau^2 x) &= a^3(-m_\tau^2 x) + \frac{5\beta_2}{2\beta_1} a^4(-m_\tau^2 x) + \left( \frac{3\beta_2^2}{2\beta_1^2} + \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) a^5(-m_\tau^2 x) \\ a_4(-m_\tau^2 x) &= a^4(-m_\tau^2 x) + \frac{13\beta_2}{3\beta_1} a^5(-m_\tau^2 x) \\ a_5(-m_\tau^2 x) &= a^5(-m_\tau^2 x). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Reemplazando lo anterior en ecuación 4.27 tenemos que

$$\begin{aligned} r_1 a + r_2 a^2 + r_3 a^3 + r_4 a^4 + r_5 a^5 &= \tilde{r}_1 a + \tilde{r}_2 \left( a^2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} a^3 + \frac{\beta_3}{\beta_1} a^4 + \frac{\beta_4}{\beta_1} a^5 \right) \\ + \tilde{r}_3 \left( a^3 + \frac{5\beta_2}{2\beta_1} a^4 + \left( \frac{3\beta_2^2}{2\beta_1^2} + \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) a^5 \right) &+ \tilde{r}_4 \left( a^4 + \frac{13\beta_2}{3\beta_1} a^5 \right) + \tilde{r}_5 a^5 + O(a^6), \end{aligned} \quad (4.29)$$

lo que implica después de alguna manipulación que los coeficientes  $\tilde{r}_i$  pueden ser normalizados en función de los  $r_i$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= r_1 \\ \tilde{r}_2 &= r_2 \\ \tilde{r}_3 &= r_3 - \frac{\beta_2}{\beta_1} r_2 \\ \tilde{r}_4 &= r_4 - \frac{5\beta_2}{2\beta_1} r_3 + \left( \frac{5\beta_2^2}{2\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) r_2 \\ \tilde{r}_5 &= r_5 - \frac{13\beta_2}{3\beta_1} r_4 + \left( \frac{28\beta_2^2}{3\beta_1^2} - \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) r_3 + \left( \frac{22\beta_2\beta_3}{3\beta_1^2} - \frac{28\beta_2^3}{3\beta_1^3} - \frac{\beta_4}{\beta_1} \right) r_2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

En la ecuación 2.24 tenemos los valores para  $c_{n,i}$ , viendo la ecuación anterior obtenemos que los nuevos coeficientes  $\tilde{c}_{n,i}$  tienen los siguientes valores



$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{0,i} &= c_{0,i} \\
\tilde{c}_{1,i} &= c_{1,i} \\
\tilde{c}_{2,i} &= c_{2,i} \\
\tilde{c}_{3,i} &= c_{3,i} - \frac{\beta_2}{\beta_1} c_{2,i} \\
\tilde{c}_{4,i} &= c_{4,i} - \frac{5\beta_2}{2\beta_1} c_{3,i} + \left( \frac{5\beta_2^2}{2\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) c_{2,i} \\
\tilde{c}_{5,i} &= c_{5,i} - \frac{13\beta_2}{3\beta_1} c_{4,i} + \left( \frac{28\beta_2^2}{3\beta_1^2} - \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) c_{3,i} + \left( \frac{22\beta_2\beta_3}{3\beta_1^2} - \frac{28\beta_2^3}{3\beta_1^3} - \frac{\beta_4}{\beta_1} \right) c_{2,i}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ahora demostraremos que con la expansión así definida no hay ambigüedad entre las distintas expresiones para  $R_\tau$ , todas dan el mismo resultado. Notar que  $\frac{d\tilde{D}}{d\log(-x)} = \sum_{n=1}^4 \tilde{c}_{n,1} \frac{da_n}{d\log(-x)} \propto \sum_{n=2}^5 \tilde{c}_{n-1,1} a_n$  por lo que viendo la definición de  $\tilde{E}(x)$  (ecn. 4.3 y ecn 4.26), éste correlador en esta expansión es exactamente la derivada logarítmica de  $\tilde{D}(x)$ , resolviendo así la ambigüedad antes planteada. De todas formas lo chequearemos explícitamente.

Así

$$\tilde{D}(m_\tau^2 x) = \frac{N_c}{12\pi^2} (1 + \tilde{c}_{1,1} a_1 + \tilde{c}_{2,1} a_2 + \tilde{c}_{3,1} a_3 + \tilde{c}_{4,1} a_4), \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(m_\tau^2 x) &= \frac{N_c}{12\pi^2} (1 + \tilde{c}_{1,1} a + \tilde{c}_{2,1} \left( \frac{-1}{\beta_1} \frac{da}{d\log(-m_\tau^2 x)} \right) \\
&+ \tilde{c}_{3,1} \left( \frac{1}{2\beta_1^2} \frac{d^2 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^2} \right) + \tilde{c}_{4,1} \left( \frac{-1}{6\beta_1^3} \frac{d^3 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^3} \right)).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Ahora derivaremos logarítmicamente la última expresión y veremos si coincide con nuestra definición de  $\tilde{E}(m_\tau^2 x)$ , si lo hace habremos probado que todas las expresiones que podamos escribir para  $R_\tau$  dan el mismo resultado. Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{D}(m_\tau^2 x)}{d\log(-m_\tau^2 x)} &= \frac{N_c}{12\pi^2} (\tilde{c}_{1,1} \frac{da}{d\log(-m_\tau^2 x)} + \tilde{c}_{2,1} \left( \frac{-1}{\beta_1} \frac{d^2 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^2} \right) \\
&+ \tilde{c}_{3,1} \left( \frac{1}{2\beta_1^2} \frac{d^3 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^2} \right) + \tilde{c}_{4,1} \left( \frac{-1}{6\beta_1^3} \frac{d^4 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^4} \right)).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Mientras nuestra definición de  $\tilde{E}(m_\tau^2 x)$  en el nuevo enfoque es (ver ecuaciones 4.6 y 4.26)

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(m_\tau^2 x) &= \frac{N_c}{12\pi^2} (2\tilde{c}_{2,2} \left( \frac{-1}{\beta_1} \frac{da}{d\log(-m_\tau^2 x)} \right) + 2\tilde{c}_{3,2} \left( \frac{1}{2\beta_1^2} \frac{d^2 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^2} \right) \\
&+ 2\tilde{c}_{4,2} \left( \frac{-1}{6\beta_1^3} \frac{d^3 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^2} \right) + 2\tilde{c}_{5,2} \left( \frac{1}{24\beta_1^4} \frac{d^4 a}{d(\log(-m_\tau^2 x))^4} \right)),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

por lo que tenemos que para que las dos expresiones anteriores sean iguales, necesitamos que

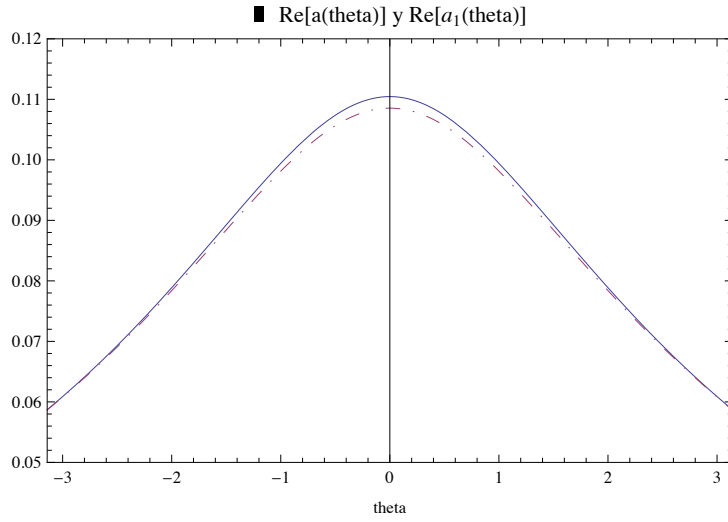
**CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)**

---

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{1,1} &= -\frac{2}{\beta_1} \tilde{c}_{2,2} \\
 \tilde{c}_{2,1} &= -\frac{1}{\beta_1} \tilde{c}_{3,2} \\
 \tilde{c}_{3,1} &= -\frac{2}{3\beta_1} \tilde{c}_{4,2} \\
 \tilde{c}_{4,1} &= -\frac{1}{2\beta_1} \tilde{c}_{5,2},
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

y en general, viendo como definimos  $\tilde{D}(m_\tau^2 x)$ ,  $\tilde{E}(m_\tau^2 x)$  y los parámetros de expansión  $a_n$ , necesitamos que

$$\tilde{c}_{n,1} = \frac{-2(n-1)!}{n! \beta_1} \tilde{c}_{n+1,2}.
 \tag{4.37}$$



**Figura 4.1:**  $Re(a)$  (línea continua) y  $Re(a_1)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_1$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ .

Comprobemos que las ecuaciones anteriores se satisfacen. De las definiciones de los coeficientes  $\tilde{c}_{n,i}$  en términos de los  $c_{n,i}$  (ecn. 4.31) y de las definiciones de éstos últimos en términos de los coeficientes  $c_{n,1}$  (ecn. 2.24) tenemos

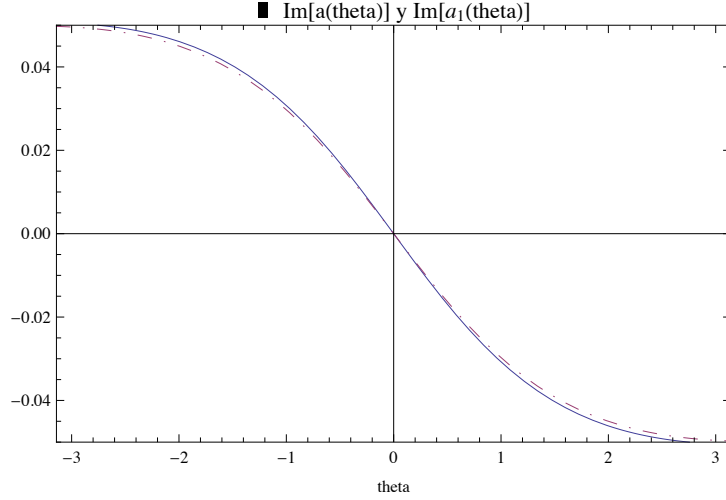


Figura 4.2:  $Im(a)$  (línea continua) y  $Im(a_1)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_1$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

$$\tilde{c}_{2,2} = c_{2,2} = -\frac{\beta_1}{2}c_{1,1} = -\frac{\beta_1}{2}\tilde{c}_{1,1} \rightarrow \tilde{c}_{1,1} = -\frac{2}{\beta_1}\tilde{c}_{2,2}, \quad (4.38)$$

con eso comprobamos la primera condición en ecuación 4.36.

Ahora veamos la segunda

$$\tilde{c}_{3,2} = c_{3,2} - \frac{\beta_2}{\beta_1}c_{2,2} = \left(-\frac{\beta_2}{2}c_{1,1} - \beta_1c_{2,1}\right) - \frac{\beta_2}{\beta_1}\left(-\frac{\beta_1}{2}c_{1,1}\right),$$

así tenemos

$$\tilde{c}_{3,2} = -\beta_1c_{2,1} = -\beta_1\tilde{c}_{2,1} \rightarrow \tilde{c}_{2,1} = -\frac{1}{\beta_1}\tilde{c}_{3,2}, \quad (4.39)$$

así comprobamos la segunda condición en ecuación 4.36.

Veamos la tercera

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{4,2} &= c_{4,2} - \frac{5\beta_2}{2\beta_1}c_{3,2} + \left(\frac{5\beta_2^2}{2\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{\beta_1}\right)c_{2,2} \\ &= \left(-\frac{\beta_3}{2}c_{1,1} - \beta_2c_{2,1} - \frac{3}{2}\beta_1c_{3,1}\right) - \frac{5\beta_2}{2\beta_1}\left(-\frac{1}{2}\beta_2c_{1,1} - \beta_1c_{2,1}\right) + \left(\frac{5\beta_2^2}{2\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{\beta_1}\right)\left(-\frac{1}{2}\beta_1c_{1,1}\right). \end{aligned}$$

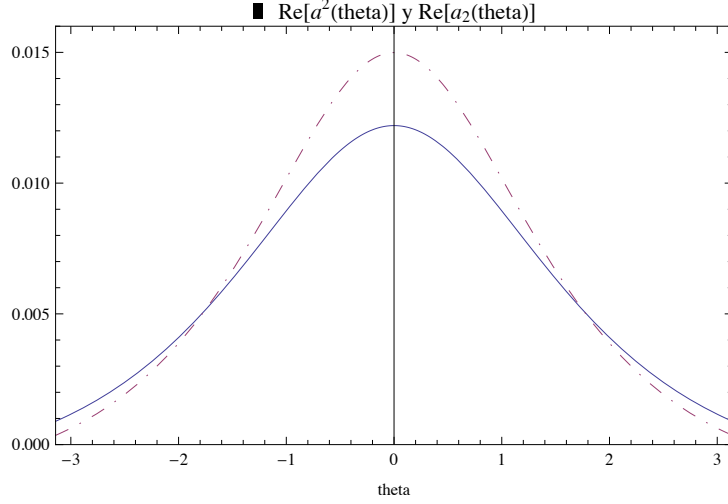


Figura 4.3:  $Re(a^2)$  (línea continua) y  $Re(a_2)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^2$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_2$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

Desarrollando lo anterior obtenemos

$$\tilde{c}_{4,2} = -\frac{3}{2}\beta_1 \left( c_{3,1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} c_{2,1} \right) = -\frac{3}{2}\beta_1 \tilde{c}_{3,1} \rightarrow \tilde{c}_{3,1} = -\frac{2}{3\beta_1} \tilde{c}_{4,2}, \quad (4.40)$$

de esa forma comprobamos la tercera condición en ecuación 4.36.

Por último

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{5,2} &= c_{5,2} - \frac{13\beta_2}{3\beta_1} c_{4,2} + \left( \frac{28\beta_2^2}{3\beta_1^2} - \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) c_{3,2} + \left( \frac{22\beta_2\beta_3}{3\beta_1^2} - \frac{28\beta_2^3}{3\beta_1^3} - \frac{\beta_4}{\beta_1} \right) c_{2,2} \\ &= \left( -\frac{1}{2}\beta_4 c_{1,1} - \beta_3 c_{2,1} - \frac{3}{2}\beta_2 c_{3,1} - 2\beta_1 c_{4,1} \right) - \frac{13\beta_2}{3\beta_1} \left( -\frac{1}{2}\beta_3 c_{1,1} - \beta_2 c_{2,1} - \frac{3}{2}\beta_1 c_{3,1} \right) \\ &\quad \left( \frac{28\beta_2^2}{3\beta_1^2} - \frac{3\beta_3}{\beta_1} \right) \left( -\frac{1}{2}\beta_2 c_{1,1} - \beta_1 c_{2,1} \right) + \left( \frac{22\beta_2\beta_3}{3\beta_1^2} - \frac{28\beta_2^3}{3\beta_1^3} - \frac{\beta_4}{\beta_1} \right) \left( -\frac{1}{2}\beta_1 c_{1,1} \right), \quad (4.41) \end{aligned}$$

tras desarrollar los términos obtenemos

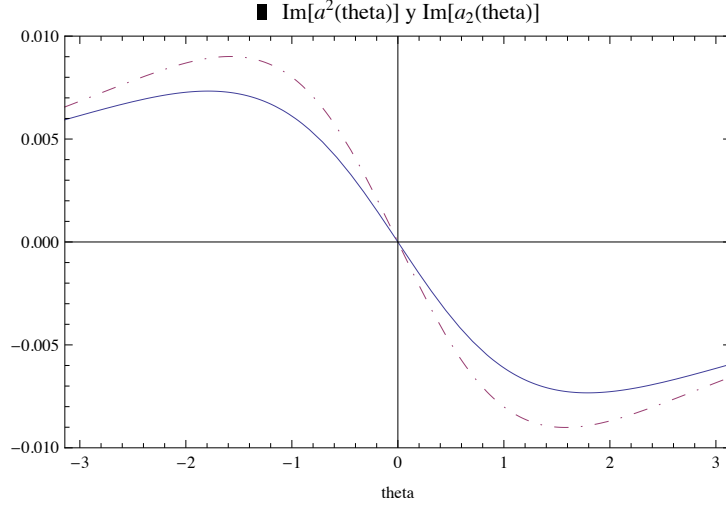


Figura 4.4:  $Im(a^2)$  (línea continua) y  $Im(a_2)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^2$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_2$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{5,2} &= -2\beta_1 \left( c_{4,1} - \frac{5\beta_2}{2\beta_1} c_{3,1} + \left( \frac{5\beta_2^2}{2\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) c_{2,1} \right) \\ \tilde{c}_{5,2} &= -2\beta_1 \tilde{c}_{4,1} \rightarrow \tilde{c}_{4,1} = -\frac{1}{2\beta_1} \tilde{c}_{5,2}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Con esto hemos comprobado que con esta nueva expansión  $\tilde{E}(m_\tau^2 x)$  después de usar el grupo de renormalización es exactamente la derivada logarítmica de  $\tilde{E}(m_\tau^2 x)$ , con lo que obtendremos el mismo resultado para  $R_\tau$  en todas sus formulaciones, ya que al integrar por partes no cambia el valor de la integral.

Ahora compararemos el valor extraído de  $\alpha_s$  usando CI y MCI. También veremos qué enfoque presenta una mejor convergencia.

Ya que todas las anteriores definiciones de  $R_\tau$  dan el mismo resultado usando el enfoque MCI, definiremos

**CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)**

---

n	1	2	3	4	total	$\alpha_s$
$\delta_{CI}^{(0)}$	0.1513	0.0308	0.0128	0.0090	0.2038	0.347
$\delta_{MCI}^{(0)}$	0.1484	0.0372	0.0104	0.0078	0.2039	0.341

Cuadro 4.1: Comparación a orden  $n$  de los distintos términos en las expansiones CI y MCI

	$c_{5,1}$	$\widetilde{c}_{5,1}$	$\sum_{n=1}^4 \delta_{CI}^{(0)}$	$\sum_{n=1}^5 \delta_{CI}^{(0)}$	$\delta_{CI}^{(0)n=5}$	$\sum_{n=1}^4 \delta_{MCI}^{(0)}$	$\sum_{n=1}^5 \delta_{MCI}^{(0)}$	$\delta_{MCI}^{(0)n=5}$
Mín	50	-250	0.2038	0.2045	0.0007	0.2039	0.2024	-0.0015
FAC	145	-155	0.2038	0.2059	0.0021	0.2039	0.2030	-0.0009
PMS	275	-25	0.2038	0.2077	0.0039	0.2039	0.2037	-0.0002
Máx	670	370	0.2038	0.2131	0.0093	0.2039	0.2060	0.0021

Cuadro 4.2: Comparación de los efectos en la inclusión de diferentes números para  $c_{5,1}$  en las expansiones CI y MCI para  $\delta^{(0)}$

$$\delta_{MCI}^{(0)} = \sum_{n=1}^4 \widetilde{c}_{n,1} \widetilde{J}_n^a(m_\tau^2), \quad (4.43)$$

donde en analogía a ecuación 2.33 definimos

$$\widetilde{J}_n^a(m_\tau^2) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} (1-x)^3 (1+x) a_n(-m_\tau^2 x). \quad (4.44)$$

Usando los valores conocidos de los coeficientes  $c_{n,1}$  y la ecuación 4.31 tenemos que los valores numéricos de los coeficientes  $\widetilde{c}_{n,1}$  son los siguientes

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{1,1} &= 1 \\ \widetilde{c}_{2,1} &= 1,640 \\ \widetilde{c}_{3,1} &= 3,456 \\ \widetilde{c}_{4,1} &= 26,385. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Con lo anterior podemos extraer  $\alpha_s^{MCI}(m_\tau^2)$  imponiendo que  $\delta_{MCI}^{(0)} = \delta_{exp}^{(0)} = 0,204$  con lo que obtenemos  $\alpha_s^{MCI}(m_\tau^2) = 0,341$ . Este valor es 0.006 menor que el valor estándar obtenido usando CI (0.347) y está más cerca del valor promedio mundial de  $\alpha_s(m_Z^2)$  después de evolución a la masa del Z [6].

Al igual a lo hecho anteriormente en FO y CI asociamos un error experimental en la extracción de  $\alpha$  proveniente del error experimental de  $\delta^{(0)}$ . En este caso éste es

#### 4.1. ERROR MCI DEBIDO A TRUNCACIÓN DE LA SERIE

	$c_{5,1}$	$\widetilde{c}_{5,1}$	$\alpha_{n=4}^{CI}$	$\alpha_{n=5}^{CI}$	$\Delta\alpha^{CI}$	$\alpha_{n=4}^{MCI}$	$\alpha_{n=4}^{MCI}$	$\Delta\alpha^{MCI}$
Mín	50	-250	0.347	0.346	-0.001	0.341	0.343	0.002
FAC	145	-155	0.347	0.345	-0.002	0.341	0.342	0.001
PMS	275	-25	0.347	0.342	-0.005	0.341	0.341	0
Máx	670	370	0.347	0.336	-0.011	0.341	0.337	-0.004

**Cuadro 4.3:** Comparación del valor extraído de  $\alpha(m_\tau^2)$  cuando tomamos en cuenta  $c_{5,1}$  ( $n = 5$ ) y cuando no ( $n = 4$ ) en CI y MCI

$$\Delta\alpha_{MCI,exp}(m_\tau^2) = 0,005, \quad (4.46)$$

vemos que es igual al calculado en CI.

#### 4.1. Error MCI debido a truncación de la serie

En la tabla 4.1 vemos la contribución de cada término  $n$  en el valor de  $\delta_{CI/MCI}^{(0)}$ , de esa forma podemos examinar la convergencia de las series

Podemos ver que aparentemente la expansión modificada posee una mejor convergencia. El tercer y cuarto término en MCI tienen un valor un 19 y 13 por ciento respectivamente que sus contrapartes CI. Aún para estar seguros debemos considerar términos superiores.

Para ver el comportamiento de nuestra expansión modificada ante la presencia de un nuevo término en la serie nos fijamos en la tabla 4.2. En ella elegimos valores razonables para  $c_{5,1}$  y observamos el cambio que produce este valor en la serie tradicional y modificada. Para elegir estos valores 'razonables' seguimos los siguientes criterios: 1.- como los valores anteriores de  $c_{n,1}$  siempre son más grandes mientras crece  $n$  (de hecho cumplen empíricamente que  $c_{n+1} > c_n^2$ ), suponemos que el mínimo valor que  $c_{5,1}$  puede tomar es  $c_{4,1}$ , así elegimos  $c_{5,1}^{min} = 50$ . El valor mínimo anterior no hay que tomarlo muy en serio, pues lo más probable es que el valor real (viendo la progresión de los  $c_{n,1}$ ) sea mucho mayor. En todo caso lo tomamos para así cubrir todo el espectro de valores posibles de  $c_{5,1}$ . 2.-  $c_{5,1}^{PMS} = 145$  es la estimación dada por el "Principle of Minimal Sensitivity"[29][30][31] 3.-  $c_{5,1}^{FAC} = 275$  es la estimación dada por "Fastest Apparent Convergence"[37][38]. 4.- Suponemos que  $\delta_{CI}^{(0)}$  es un observable descrito por una serie asintótica, y que no hemos alcanzado el término menor de la serie, por lo que las sucesivas correcciones son de una magnitud cada vez menor. Para determinar  $c_{5,1}^{max}$  nos vamos al caso extremo en que la corrección a orden  $n = 5$  es igual a la corrección a

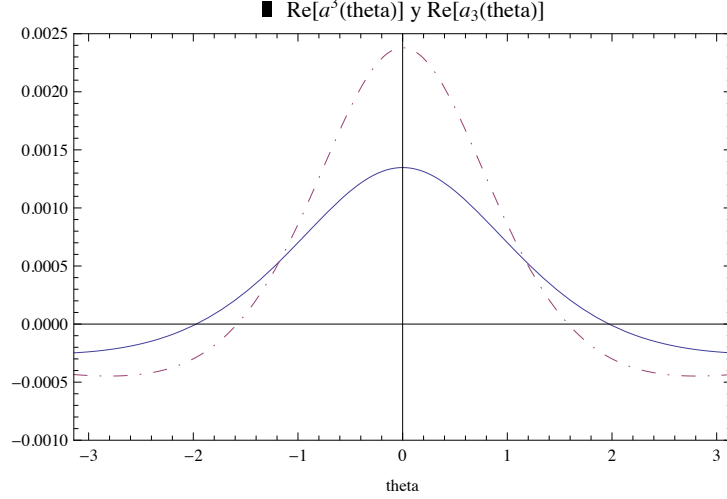


Figura 4.5:  $Re(a^3)$  (línea continua) y  $Re(a_3)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^3$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_3$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

$n = 4$ . Imponiendo lo anterior encontramos  $c_{5,1}^{max} = 670$ . Observando el efecto que los valores anteriores producen en  $\delta_{CI}^{(0)}$  y  $\delta_{MCI}^{(0)}$  podemos darnos cuenta que  $\delta_{MCI}^{(0)}$  es mucho más estable que  $\delta_{CI}^{(0)}$  ante la adición de un nuevo término por lo que podemos confirmar la mejor convergencia enunciada con anterioridad.

Viendo la tabla 4.2 también podemos asociar un error por truncación a  $\alpha_{MCI}$ . Anteriormente tomamos el valor dado por PMS  $c_{5,1}$  como indicativo de nuestro error por truncación (página 19). Observando la tabla 4.3 obtenemos  $\Delta\alpha_{trun}^{MCI} = 0,001$ . Viendo la definición de  $\tilde{D}(m_\tau^2 x)$  y  $D(m_\tau^2 x)$  podemos observar que la explicación de esta mayor estabilidad de MCI ante la adición de nuevos términos en la serie la podemos obtener constatando que  $\tilde{c}_{5,1} \sim c_{5,1} - 300$  (esto al evaluar la ecuación 4.31) lo que implica que en nuestro rango de interés  $|\tilde{c}_{5,1}|$  va a ser del mismo orden o menor que  $c_{5,1}$ . Además a pesar de que en general  $\frac{a_n(m_\tau^2)}{a^n(m_\tau^2)} > 1$  (ver ecuaciones 4.24 y 4.28) no pasa lo mismo con  $\frac{a_n(m_\tau^2 e^{i\theta})}{a^n(m_\tau^2 e^{i\theta})}$  (ver figuras 4.1 a 4.10) lo cual depende de en qué parte del contorno estemos.



## 4.2. ERROR MCI DEBIDO A LA ELECCIÓN DE ESQUEMA Y ESCALA DE RENORMALIZACIÓN

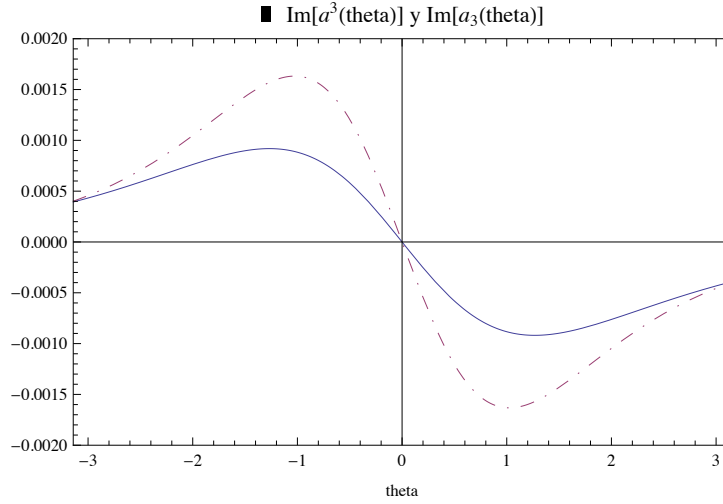


Figura 4.6:  $Im(a^3)$  (línea continua) y  $Im(a_3)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^3$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_3$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

Eso se traduce en que de hecho  $\tilde{J}_5^a(m_\tau^2) = 0,000007$  es menor que  $J_5^a(m_\tau^2) = 0,000013$  (ver sus definiciones en ecuaciones 2.33 y 4.44). Las figuras 4.1 a 4.10 nos muestran el comportamiento de  $a^n$  y  $a_n$  en función de su posición en el contorno ( $\theta$ ).

## 4.2. Error MCI debido a la elección de esquema y escala de renormalización

En el capítulo anterior examinamos la dependencia de nuestro observable  $\delta^{(0)}$  bajo cambios de esquema de renormalización y escala  $\mu$ , en FO y CI. Ahora haremos lo mismo en MCI con el objetivo de saber si la nueva expansión tiene un mejor comportamiento ante la variación de estos parámetros no físicos.

Tenemos, viendo ecuaciones 4.43 y 4.45, en el esquema  $\overline{MS}$

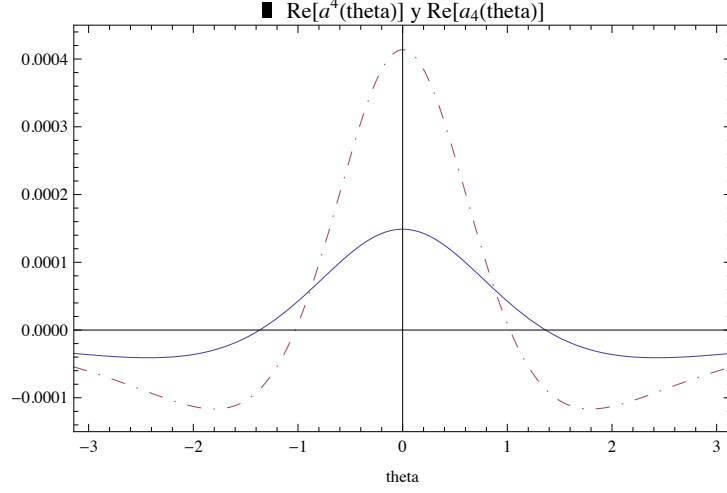


Figura 4.7:  $Re(a^4)$  (línea continua) y  $Re(a_4)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^4$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_4$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

$$\delta_{MCI, \overline{MS}}^{(0)} = \tilde{J}_1^a(m_\tau^2) + 1,640\tilde{J}_2^a(m_\tau^2) + 3,456\tilde{J}_3^a(m_\tau^2) + 26,385\tilde{J}_4^a(m_\tau^2). \quad (4.47)$$

Igualando a  $\delta_{exp}^{(0)} = 0,204$  obtenemos que  $\alpha_s^{\overline{MS}}(m_\tau^2) = 0,341$ .

Queremos extraer  $\alpha$  en los esquemas MOM y 't Hooft de forma similar a lo hecho anteriormente en FO y CI. Para eso reescribimos la ecuación anterior en términos de parámetros MOM y 't Hooft. En el caso de MOM viendo ecuaciones 3.61, 3.66, 4.31 y sabiendo que  $\beta_3^{MOM} = 20,9184$  y  $\beta_4^{MOM} = 160,7726$  tenemos que

$$\delta_{MCI, MOM}^{(0)} = \tilde{J}_1^a(m_\tau^2) + 1,640\tilde{J}_2^a(m_\tau^2) - 1,371\tilde{J}_3^a(m_\tau^2) - 1,141\tilde{J}_4^a(m_\tau^2) \quad (4.48)$$

Igualando a  $\delta_{exp}^{(0)} = 0,204$  extraemos  $\alpha_s^{MOM}(m_\tau^2) = 0,380$ . Para hacer comparables nuestros acoplamientos extraídos en los diferentes esquemas, ocupamos las ecuaciones

## 4.2. ERROR MCI DEBIDO A LA ELECCIÓN DE ESQUEMA Y ESCALA DE RENORMALIZACIÓN

---

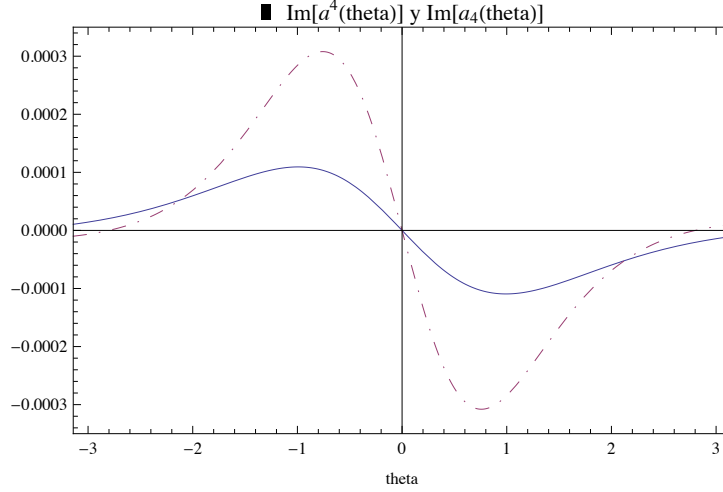


Figura 4.8:  $Im(a^4)$  (línea continua) y  $Im(a_4)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^4$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_4$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

que relacionan el valor de  $\alpha$  con los valores de los coeficientes de la función  $\beta$  (ecuaciones 3.59 y 3.60) obteniendo  $\alpha_s^{\overline{MS}}(m_\tau^2) = 0,343$ .

De forma similar tenemos en el esquema 't Hooft ( $\beta_3 = \beta_4 = 0$ )

$$\delta_{MCI, 'tHooft}^0 = \tilde{J}_1^a(m_\tau^2) + 1,640\tilde{J}_2^a(m_\tau^2) + 7,927\tilde{J}_3^a(m_\tau^2) + 39,006\tilde{J}_4^a(m_\tau^2), \quad (4.49)$$

con lo que extraemos  $\alpha_s^{'tHooft}(m_\tau^2) = 0,324$  lo que implica  $\alpha_s^{\overline{MS}}(m_\tau^2) = 0,345$ . Usamos el mismo criterio que el capítulo anterior para calcular el error por variación de esquema en  $\alpha$ . De esa forma asociamos  $\Delta\alpha_{esquema}^{MCI} = 0,004$ . Observamos que es menor al error análogo en FO (ver ecn. 3.76) e igual al error en CI (ecn. 3.82).

Ahora veremos la dependencia en la escala  $\mu$  (en esquema  $\overline{MS}$ ). Igual a lo hecho con FO y CI variaremos la escala entre  $0,8m_\tau$  y  $1,2m_\tau$ . El resultado para  $\delta_{MCI, \mu^2=m_\tau^2}^{(0)}$  está dado en ecuación 4.47. Con ayuda de las ecuaciones 3.87, 3.88, 3.89 tenemos

CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)

---

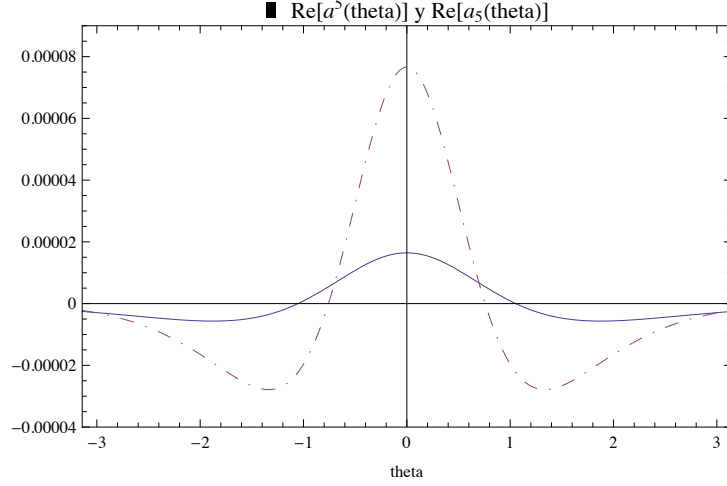


Figura 4.9:  $Re(a^5)$  (línea continua) y  $Re(a_5)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^5$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_5$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

que  $c_{2,1}((0,8m_\tau)^2) = 0,636$ ,  $c_{3,1}((0,8m_\tau)^2) = 2,301$ ,  $c_{4,1}((0,8m_\tau)^2) = 27,969$ ; y  $c_{2,1}((1,2m_\tau)^2) = 2,460$ ,  $c_{3,1}((1,2m_\tau)^2) = 11,194$ ,  $c_{4,1}((1,2m_\tau)^2) = 80,065$ . Ahora, usando ecuación 4.31 obtenemos

$$\delta_{MCI,\mu^2=(0,8m_\tau)^2}^{(0)} = \tilde{J}_1^a((0,8m_\tau)^2) + 0,636\tilde{J}_2^a((0,8m_\tau)^2) + 1,170\tilde{J}_3^a((0,8m_\tau)^2) + 19,924\tilde{J}_4^a((0,8m_\tau)^2), \quad (4.50)$$

con lo que obtenemos al igualar a  $\delta_{exp}^{(0)} = 0,204$ ,  $\alpha_s((0,8m_\tau)^2) = 0,404$  y después de evolución (ecn. 2.22)  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,346$ .

De forma análoga tenemos

$$\delta_{MCI,\mu^2=(1,2m_\tau)^2}^{(0)} = \tilde{J}_1^a((1,2m_\tau)^2) + 2,460\tilde{J}_2^a((1,2m_\tau)^2) + 6,821\tilde{J}_3^a((1,2m_\tau)^2) + 38,752\tilde{J}_4^a((1,2m_\tau)^2), \quad (4.51)$$

obteniendo  $\alpha_s((1,2m_\tau)^2) = 0,308$  y después de evolución  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,343$ .

## 4.2. ERROR MCI DEBIDO A LA ELECCIÓN DE ESQUEMA Y ESCALA DE RENORMALIZACIÓN

---

$\delta^0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\sum_{n=1}^4$
FO, $\overline{MS}$	0.1082	0.0609	0.0334	0.0174	0.2200
FO, MOM	0.1194	0.0741	0.0366	0.0105	0.2406
FO, 't Hooft	0.1019	0.0540	0.0326	0.0198	0.2098
CI, $\overline{MS}$	0.1479	0.0297	0.0122	0.0086	0.1984
CI, MOM	0.1616	0.0333	0.0032	0.0014	0.1996
CI, 't Hooft	0.1382	0.0268	0.0186	0.0119	0.1954
MCI, $\overline{MS}$	0.1479	0.0381	0.0107	0.0067	0.2034
MCI, MOM	0.1616	0.0433	-0.0041	0.0001	0.2010
MCI, 't Hooft	0.1382	0.0318	0.0197	0.0108	0.2005

Cuadro 4.4: Contribución orden por orden en  $\delta^{(0)}$  para FO, CI y MCI en distintos esquemas. Como referencia hemos usado  $\alpha_{\overline{MS}} = 0,34$  lo que corresponde a  $\alpha_{MOM} = 0,375$  y  $\alpha_{tHooft} = 0,320$

$\delta^0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\sum_{n=1}^4$
FO, $\mu^2 = (0,8m_\tau)^2$	0.1261	0.0667	0.0303	0.0111	0.2341
FO, $\mu^2 = m_\tau^2$	0.1082	0.6014	0.0334	0.0174	0.2200
FO, $\mu^2 = (1,2m_\tau)^2$	0.0974	0.0571	0.0342	0.0202	0.2090
CI, $\mu^2 = (0,8m_\tau)^2$	0.1739	0.0149	0.0060	0.0065	0.2013
CI, $\mu^2 = m_\tau^2$	0.1479	0.0297	0.0122	0.0086	0.1984
CI, $\mu^2 = (1,2m_\tau)^2$	0.1313	0.0364	0.0165	0.0105	0.1947
MCI, $\mu^2 = (0,8m_\tau)^2$	0.1739	0.0187	0.0045	0.0038	0.2009
MCI, $\mu^2 = m_\tau^2$	0.1479	0.0370	0.0104	0.0078	0.2031
MCI, $\mu^2 = (1,2m_\tau)^2$	0.1313	0.0448	0.0156	0.0097	0.2016

Cuadro 4.5: Contribución orden por orden para  $\delta^{(0)}$  para FO, CI y MCI al variar  $\mu$ . Como referencia hemos usado  $\alpha(m_\tau^2) = 0,34$  lo que corresponde, después de evolución, a  $\alpha((0,8m_\tau)^2) = 0,396$  y  $\alpha((1,2m_\tau)^2) = 0,306$

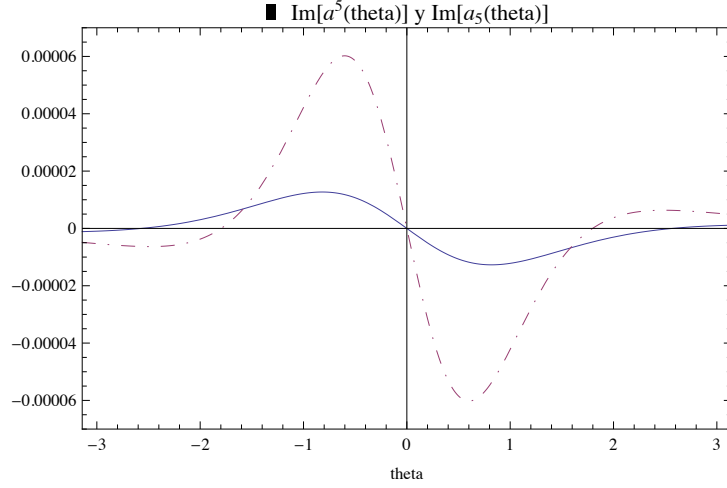


Figura 4.10:  $Im(a^5)$  (línea continua) y  $Im(a_5)$  (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración  $|x| = 1$  ( $\theta$ ).  $a^5$  está evaluado en  $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$  y  $a_5$  en  $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$

Al igual a lo hecho en el capítulo anterior asociamos un error  $\Delta\alpha_{escala}^{MCI} = {}^{+0,005}_{-0,000}$ . Por inspección observamos que  $\delta_{MCI}^{(0)}$  alcanza su máximo para  $\mu^2 = m_\tau^2$  (ver cuadro 4.5), esa es la razón de que el error inferior sea -0.000. Este error es bastante menor que el calculado en FO. El error inferior MCI mejora significativamente el error inferior en CI, mientras que los errores superiores son prácticamente los mismos.

En este enfoque tenemos que la suma de errores nos da un resultado final de

$$\begin{aligned} \alpha_s^{MCI}(m_\tau^2) &= 0,341^{+0,005}_{-0,000}|_{escala} \pm 0,005_{exp} \pm 0,001_{trun} \pm 0,004_{esquema}, \\ \alpha_s^{MCI}(m_\tau^2) &= 0,341^{+0,008}_{-0,006}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Vemos una reducción significativa del error final comparado con los otros enfoques.

Ahora haremos el procedimiento inverso, tomando como referencia el valor  $\alpha(m_\tau^2) \sim 0,34$  podemos obtener el valor de  $\delta^{(0)}$  en cada uno de los diferentes enfoques.

## 4.2. ERROR MCI DEBIDO A LA ELECCIÓN DE ESQUEMA Y ESCALA DE RENORMALIZACIÓN

---

En ecuaciones 3.72, 3.78, 4.47, 4.48 y 4.49 podemos ver el valor de  $\delta_{FO}^{(0)}$ ,  $\delta_{CI}^{(0)}$  y  $\delta_{MCI}^{(0)}$  en función de  $\alpha$  en cada uno de los esquemas considerados. En el cuadro 4.4 se muestra el comportamiento de  $\delta^{(0)}$  término por término en cada uno de los esquemas considerados.

Ya vistos los esquemas, haremos lo mismo para ver cómo afecta a  $\delta^{(0)}$  la variación de la escala  $\mu$ . Lo primero será recordar las expresiones en FO, CI y MCI al variar la escala. Viendo las ecuaciones 3.94, 3.106, 4.47, 4.50 y 4.51 tenemos las siguientes expresiones (en lo siguiente  $\mu^2 = (\xi m_\tau)^2$ )

$$\begin{aligned}\delta_{FO,\xi=1}^{(0)} &= a(m_\tau^2) + 5,2025a^2(m_\tau^2) + 26,3672a^3(m_\tau^2) + 127,0821a^4(m_\tau^2) \\ \delta_{FO,\xi=1,2}^{(0)} &= a((1,2m_\tau)^2) + 6,0229a^2((1,2m_\tau)^2) + 37,0357a^3((1,2m_\tau)^2) + 224,8754a^4((1,2m_\tau)^2) \\ \delta_{FO,\xi=0,8}^{(0)} &= a((0,8m_\tau)^2) + 4,1984a^2((0,8m_\tau)^2) + 15,1422a^3((0,8m_\tau)^2) + 43,7945a^4((0,8m_\tau)^2)\end{aligned}\quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\delta_{CI,\xi=1}^{(0)} &= J_1^a(m_\tau^2) + 1,640J_2^a(m_\tau^2) + 6,371J_3^a(m_\tau^2) + 49,076J_4^a(m_\tau^2) \\ \delta_{CI,\xi=1,2}^{(0)} &= J_1^a((1,2m_\tau)^2) + 2,460J_2^a((1,2m_\tau)^2) + 11,194J_3^a((1,2m_\tau)^2) + 80,065J_4^a((1,2m_\tau)^2) \\ \delta_{CI,\xi=0,8}^{(0)} &= J_1^a((0,8m_\tau)^2) + 0,636J_2^a((0,8m_\tau)^2) + 2,301J_3^a((0,8m_\tau)^2) + 27,969J_4^a((0,8m_\tau)^2)\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\delta_{MCI,\xi=1}^{(0)} &= \tilde{J}_1^a(m_\tau^2) + 1,640\tilde{J}_2^a(m_\tau^2) + 3,456\tilde{J}_3^a(m_\tau^2) + 26,385\tilde{J}_4^a(m_\tau^2) \\ \delta_{MCI,\xi=1,2}^{(0)} &= \tilde{J}_1^a((1,2m_\tau)^2) + 2,460\tilde{J}_2^a((1,2m_\tau)^2) + 6,821\tilde{J}_3^a((1,2m_\tau)^2) + 38,752\tilde{J}_4^a((1,2m_\tau)^2) \\ \delta_{MCI,\xi=0,8}^{(0)} &= \tilde{J}_1^a((0,8m_\tau)^2) + 0,636\tilde{J}_2^a((0,8m_\tau)^2) + 1,170\tilde{J}_3^a((0,8m_\tau)^2) + 19,924\tilde{J}_4^a((0,8m_\tau)^2)\end{aligned}\quad (4.55)$$

En el cuadro 4.5 veremos la contribución orden por orden al resultado de  $\delta^{(0)}$  en FO, CI y MCI al variar la escala  $\mu$  entre  $(0,8m_\tau)^2$  y  $(1,2m_\tau)^2$ .

Viendo las dos tablas anteriores observamos que FO predice un comportamiento mucho más inestable que CI y MCI tanto al variar escala como esquema. Entre estas últimas MCI mejora la estabilidad de estos resultados, si tomamos como medición de esto la diferencia entre el mayor y menor valor predicho para  $\delta^{(0)}$  al variar estos parámetros. Tenemos que al variar esquema la diferencia en CI es de 0.0042 mientras que en MCI es de 0.0029. De forma análoga la diferencia en el valor de  $\delta^0$  al variar escala es de 0.0066 CI y 0.0022 en MCI. La explicación a esto puede provenir de que de la misma forma que  $\delta_{CI}^{(0)}$  contiene efectivamente órdenes más altos en potencias de  $a(m_\tau^2)$  (esto se puede notar al ver la expansión de Taylor de  $a(-m_\tau^2 x)$  en potencias de  $a(m_\tau^2)$  en ecuación 3.20) que  $\delta_{FO}^{(0)}$ ,  $\delta_{MCI}^{(0)}$  contiene efectivamente órdenes más altos en potencias de  $a(-m_\tau^2 x)$  que

## CAPÍTULO 4. TEORÍA DE PERTURBACIONES MEJORADA EN EL CONTORNO MODIFICADA (MCI)

---

$\delta_{CI}^{(0)}$  (ver definición de los coeficientes  $a_n$  ecuación 4.24 y 4.28). Obviamente todos éstos efectos son relevantes debido a que el acoplamiento  $\alpha$  a escala  $m_\tau$  es relativamente grande.



# Capítulo 5

## Conclusión

El estudio de la razón  $R_\tau$  nos permite una extracción limpia, con efectos no perturbativos bajo control, de  $\alpha_s$  a bajas energías. Al comparar este valor  $\alpha_s^{MCI}(m_\tau^2) = 0,341$ , tras evolución  $\alpha_s^{MCI}(m_Z^2) = 0,1211$  [6], con el valor promedio mundial  $\alpha_s^{WA}(m_Z^2) = 0,1184$  [2], obtenemos una diferencia de un 1,2 %.

A pesar de la concordancia anteriormente enunciada, hay evidentes complicaciones teóricas en el sector de bajas energías de la teoría. En el estudio de  $R_\tau$  la escala a considerar es  $m_\tau = 1,777$  GeV la cual es cercana a  $E_{QCD} \sim 1$  GeV, por lo que el acoplamiento es lo bastante grande como para que distintas formas de evaluar la función de Adler usando RGE den resultados sensiblemente distintos. Es así como  $D_{CI}(m_\tau^2 e^{i\theta}) - D_{FO}(m_\tau^2 e^{i\theta}) = O(a^5(m_\tau^2))$  (ver ecns. 2.18, 2.19 y 3.20) y  $D_{MCI}(m_\tau^2 e^{i\theta}) - D_{CI}(m_\tau^2 e^{i\theta}) = O(a^5(m_\tau^2 e^{i\theta}))$  (ver ecn. 4.25) dan diferencias numéricas significativas que se extienden a la evaluación de  $R_\tau$  y extracción de  $\alpha_s$ .

Dentro de los enfoques estándares (FO y CI), podemos advertir bastantes ventajas de CI en comparación a FO. En FO,  $\alpha_s(m_\tau^2 e^{i\theta})$  ha sido expandida en Taylor y términos mayores que el orden FO dado son truncados. Además esa expansión en potencias de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  ha sido usada para predecir  $\alpha_s(m_\tau^2 e^{i\theta})$  en todo el contorno. Como observamos en la figura 3.1, esta expansión se comporta pobremente para  $\theta$  lejano a 0. A consecuencia de lo anterior CI demuestra ser mucho menos sensible a la variación de esquema, escala y adición de un nuevo término en la serie. Lo anterior lo constatamos en un menor error total relativo en CI,  $\frac{\Delta\alpha_{CI}(m_\tau^2)}{\alpha_{CI}(m_\tau^2)} = 2,6\%$  (2,3% si consideramos error inferior) comparado con el valor en FO,  $\frac{\Delta\alpha_{FO}(m_\tau^2)}{\alpha_{FO}(m_\tau^2)} = 5,2\%$ .

A pesar de lo satisfactorio que pudiera parecer CI, hay ciertas ambigüedades en

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIÓN

---

la definición de expresiones para  $R_\tau$  debido a integración por partes (ecns. 4.1, 4.2 y 4.4 por ejemplo). De nuevo este es un efecto que se nota al ser  $\alpha(m_\tau^2)$  relativamente grande. Si el acoplamiento fuera pequeño la diferencia entre expresiones alternativas de  $R_\tau$  sería despreciable. La ambigüedad proviene de que nuestro correlador  $E(m_\tau^2 e^{i\theta})$  (definido en ecuación 4.3) no es exactamente la derivada logarítmica de  $D(m_\tau^2 e^{i\theta})$ , después de que el proceso de mejora usando el grupo de renormalización es llevado a cabo. Para corregir lo anterior, y teniendo en cuenta que la ambigüedad parte de integrar por partes, es que planteamos una expansión de la función de Adler en derivadas en vez de potencias de  $a$ . Este nuevo enfoque, el cual llamamos Teoría de Perturbaciones Mejorada en el Contorno Modificada (MCI), corrige con éxito la ambigüedad.

Aparte de lo anterior, MCI resulta ser más estable ante variación de escala y esquema (en éste último caso no de forma tan significativa). Además presenta una mejor convergencia, esto se debe a que por definición (ecn. 4.31) los términos  $\tilde{c}_{n,1}$  son menores a los  $c_{n,1}$  y que a pesar de que  $a_n(m_\tau^2) > a^n(m_\tau^2)$  (ver ecns. 4.24 y 4.28), esa relación de orden no es cierta en todo el contorno (ver figuras 4.1 a 4.10). Ésto implica que los términos  $\tilde{c}_{n,1} \tilde{J}_a^n$  (ecn. 4.43) tiendan a ser menores que los términos  $c_{n,1} J_n^a$  (ecn. 2.32) ( $n > 2$ ). Todo lo anterior resulta en un menor error relativo en MCI,  $\frac{\Delta\alpha_{MCI}(m_\tau^2)}{\alpha_{MCI}(m_\tau^2)} = 2,3\%$  (1,8%) en comparación al 2,6% (2,3%) calculado en CI.

Finalmente los valores extraídos en los distintos enfoques son:

$$\begin{aligned}\alpha_s^{FO}(m_\tau^2) &= 0,326 \pm 0,009_{escala} \pm 0,004_{exp} \pm 0,007_{trun} \pm 0,012_{esquema}, \\ \alpha_s^{FO}(m_\tau^2) &= 0,326 \pm 0,017;\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\alpha_s^{CI}(m_\tau^2) &= 0,347_{-0,004}^{+0,006}|_{escala} \pm 0,005_{exp} \pm 0,002_{trun} \pm 0,004_{esquema}, \\ \alpha_s^{CI}(m_\tau^2) &= 0,347_{-0,008}^{+0,009}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\alpha_s^{MCI}(m_\tau^2) &= 0,341_{-0,000}^{+0,005}|_{escala} \pm 0,005_{exp} \pm 0,001_{trun} \pm 0,004_{esquema}, \\ \alpha_s^{MCI}(m_\tau^2) &= 0,341_{-0,006}^{+0,008}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

# Índice de figuras

2.1. Decaimiento Hadrónico del $\tau$ a nivel árbol. . . . .	4
2.2. Decaimiento Leptónico del $\tau$ a nivel árbol. . . . .	5
2.3. Contorno de integración en el plano complejo s . . . . .	6
3.1. Comparación entre la solución exacta (numérica) de $\alpha(m_\tau^2 e^{i\phi})$ y su expansión a cuarto orden en Taylor, en el círculo $\phi = -\pi.. \pi$ [35]. El ejemplo usa $\alpha(m_\tau^2) = 0,35$ . . . . .	33
4.1. $Re(a)$ (línea continua) y $Re(a_1)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_1$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	44
4.2. $Im(a)$ (línea continua) y $Im(a_1)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_1$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	45
4.3. $Re(a^2)$ (línea continua) y $Re(a_2)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^2$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_2$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	46
4.4. $Im(a^2)$ (línea continua) y $Im(a_2)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^2$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_2$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	47
4.5. $Re(a^3)$ (línea continua) y $Re(a_3)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^3$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_3$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	50
4.6. $Im(a^3)$ (línea continua) y $Im(a_3)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^3$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_3$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	51

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.7. $Re(a^4)$ (línea continua) y $Re(a_4)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^4$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_4$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	52
4.8. $Im(a^4)$ (línea continua) y $Im(a_4)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^4$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_4$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	53
4.9. $Re(a^5)$ (línea continua) y $Re(a_5)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^5$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_5$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	54
4.10. $Im(a^5)$ (línea continua) y $Im(a_5)$ (línea punteada) en función de la posición sobre el contorno de integración $ x  = 1$ ( $\theta$ ). $a^5$ está evaluado en $\alpha_{CI}(m_\tau^2)$ y $a_5$ en $\alpha_{MCI}(m_\tau^2)$ . . . . .	56

# Índice de cuadros

3.1. Comparación a orden $n$ de los distintos términos en las expansiones FO y CI usando $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,34$ . . . . .	14
3.2. Errores en las distintas cantidades involucradas en el cálculo de $\delta_{exp}^{(0)}$ y su impacto en el error total $\Delta\delta_{exp}^{(0)}$ . . . . .	16
4.1. Comparación a orden $n$ de los distintos términos en las expansiones CI y MCI . . . . .	48
4.2. Comparación de los efectos en la inclusión de diferentes números para $c_{5,1}$ en las expansiones CI y MCI para $\delta^{(0)}$ . . . . .	48
4.3. Comparación del valor extraído de $\alpha(m_\tau^2)$ cuando tomamos en cuenta $c_{5,1}$ ( $n = 5$ ) y cuando no ( $n = 4$ ) en CI y MCI . . . . .	49
4.4. Contribución orden por orden en $\delta^{(0)}$ para FO, CI y MCI en distintos esquemas. Como referencia hemos usado $\alpha_{\overline{MS}} = 0,34$ lo que corresponde a $\alpha_{MOM} = 0,375$ y $\alpha_{tHooft} = 0,320$ . . . . .	55
4.5. Contribución orden por orden para $\delta^{(0)}$ para FO, CI y MCI al variar $\mu$ . Como referencia hemos usado $\alpha(m_\tau^2) = 0,34$ lo que corresponde, después de evolución, a $\alpha((0,8m_\tau)^2) = 0,396$ y $\alpha((1,2m_\tau)^2) = 0,306$ . . . . .	55

## ÍNDICE DE CUADROS

---

# Bibliografía

- [1] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B667, 1 (2008).
- [2] S. Bethke, Eur. Phys. J. C64, 689 (2009), 0908.1135.
- [3] M. Davier, S. Descotes-Genon, A. Hocker, B. Malaescu, and Z. Zhang, Eur. Phys. J. C56, 305 (2008), 0803.0979.
- [4] A. A. Pivovarov, Z. Phys. C53 (1992) 461-464.
- [5] F. Le Diberder and A. Pich, Phys. Lett. B286 (1992) 147-152.
- [6] Gorazd Cvetic, Marcelo Loewe, Cristian Martinez, Cristian Valenzuela, arXiv:1005.4444v1 [hep-ph] (2010).
- [7] T. Coan et al. [CLEO Collaboration], Phys. Lett. B356 (1995) 580-588.
- [8] R. Barate et al. [ALEPH Collaboration], Eur. Phys. J. C 4, 409 (1998).
- [9] K. Ackerstaff et al. [OPAL collaboration], Eur. Phys. J. C7 (1999) 571-593.
- [10] S. Schael et al. [ALEPH Collaboration], Phys. Rept. 421 (2005) 191-284.
- [11] E. Braaten, S. Narison, and A. Pich, Nucl. Phys. B373 (1992) 581-612.
- [12] Y.-S. Tsai, Phys. Rev. D4 (1971) 2821.
- [13] M. Davier, A. Hocker, and Z. Zhang, Rev. Mod. Phys. 78 (2006) 1043-1109
- [14] K. Schilcher and M.D. Tran, Phys. Rev. D 29, 570 (1984)
- [15] M. Beneke and M. Jamin, JHEP 09, 044 (2008), 0806.3156.
- [16] S. L. Adler, Phys. Rev. D10 (1974) 3714.
- [17] E. Braaten, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1606-1609.
- [18] S. Narison and A. Pich, Phys. Lett. B211 (1988) 183.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [19] E. C. Poggio, H. R. Quinn, and S. Weinberg, Phys. Rev. D13 (1976) 1958.
- [20] E. Braaten, Phys. Rev. D39 (1989) 1458.
- [21] W. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 1815.
- [22] E. Braaten and C. S. Li, Phys. Rev. D42 (1990) 3888-3891.
- [23] S. G. Gorishnii, A. L. Kataev, and S. A. Larin, Phys. Lett. B259 (1991) 144-150.
- [24] L. R. Surguladze and M. A. Samuel, Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 560-563.
- [25] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kuhn, Phys. Rev. Lett. 101 (2008) 012002.
- [26] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, and T. Muta, Phys. Rev. D18 (1978) 3998.
- [27] van Ritbergen, T., J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin, 1997a, Phys. Lett. B400, 379.
- [28] van Ritbergen, T., J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin, 1997b, Phys. Lett. B405, 327.
- [29] P. M. Stevenson, Optimized perturbation theory, Phys. Rev. D23 (1981) 2916.
- [30] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kuhn, Phys. Rev. D67 (2003) 074026.
- [31] A. L. Kataev and V. V. Starshenko, Mod. Phys. Lett. A10 (1995) 235-250.
- [32] K.G. Chetyrkin and A. Retey, arXiv:hep-ph/0007088v1, (2000).
- [33] O. V. Tarasov and D. V. Shirkov, Sov. J. Nucl. Phys. 51, 877 (1990).
- [34] 't Hooft G., in: The whys of subnuclear physics (Erice, 1977), ed. A.Zichichi, Plenum Press, New York, 1979.
- [35] Menke, S., 1998, PhD Thesis [BONN-IR-98-13].
- [36] G. Cvetič and C. Valenzuela, Phys. Rev. D74, 114030 (2006), hep-ph/0608256.
- [37] M. R. Pennington, Phys. Rev. D26 (1982) 2048.
- [38] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kuhn, Phys. Rev. Lett. 101, 012002 (2008), 0801.1821.