



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE FÍSICA

Correcciones Térmicas a las Longitudes de Scattering Pion-Pion en el Modelo Sigma Lineal.

por

Cristian Alexis Martínez Villalobos.

Informe de práctica presentado a la Facultad de Física
de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como
uno de los requisitos para optar al grado académico de
Licenciado en Física.

PROFESOR GUÍA : Dr. Marcelo Loewe.
COMISIÓN INFORMANTE : Dr. Máximo Bañados.
Dr. Rafael Benguria.

Julio, 2007
SANTIAGO – CHILE

2+2=4: Acto de fe.

Nicanor Parra.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres y hermanos por todo su apoyo a lo largo de mi vida.

A Paula; por su amor, cariño y comprensión.

A Miguel Pino y Pedro Liendo por las tardes de filosofía popular y discusión científica.

A Niño Grande F.C. en pleno, por los momentos de relajo junto al balón.

Se agradece el apoyo financiero del proyecto FONDECYT 1051067.

Por supuesto agradezco a mi profesor guía, don Marcelo Loewe, por su gran disposición y compromiso con el desarrollo de esta práctica.

Resumen

El propósito de este trabajo es calcular correcciones térmicas a las longitudes de scattering pion-pion en el marco del modelo sigma lineal. Para eso se estudiaron los propagadores térmicos en los formalismos de tiempo imaginario y real de teoría cuántica de campos a temperatura finita. Se estudió el formalismo para construir amplitudes de scattering con isospín definido. Inicialmente calculamos las longitudes de scattering y pendientes en el marco de este modelo a nivel árbol. Posteriormente se calcularon las correcciones térmicas a las longitudes de scattering de momento angular $\ell = 0$, al nivel de un loop y se comparó con otros resultados obtenidos en el marco de teoría quiral de perturbaciones y el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, para las longitudes de scattering en los canales de isospín $I = 0, 2$.

Índice general

Resumen	I
Introducción	v
1. Formalismo de Temperatura Finita	1
1.1. Mecánica Estadística Cuántica	1
1.2. Propagadores a temperatura finita	2
1.2.1. Propagadores de campos escalares	3
2. Modelo Sigma Lineal y sus Reglas de Feynman	9
2.1. Modelo Sigma Lineal	10
2.2. Reglas de Feynman	12
3. Formalismo de Scattering	15
3.1. Operadores de proyección de Isospín	16
3.2. Expansión de T^I en ondas parciales	17
3.3. Longitudes de scattering	18
4. Cálculo de Longitudes de Scattering	21
4.1. Cálculo a nivel árbol	21
4.2. Correcciones a 1 loop	29
4.2.1. Amplitudes a 1-loop	30
4.2.2. Cálculo de las amplitudes	44
4.2.3. Análisis numérico	51
5. Conclusiones	55

Introducción

Las longitudes de scattering son parámetros muy importantes, puesto que determinan casi completamente la dinámica de scattering a bajas energías y además su medición sirve como test para los distintos modelos de interacciones fuertes en ese régimen. Como ejemplo, el objetivo de Weinberg [1] para calcular longitudes de scattering (fue el primero que lo hizo) pion-pion fue testear la hipótesis de corriente axial parcialmente conservada de las interacciones fuertes.

El presente trabajo está dividido en 4 partes. La primera nos da cuenta de cómo introducir la temperatura en los cálculos de teoría de campos. En la segunda presentamos el modelo y derivamos sus reglas de Feynman. En la tercera introducimos el formalismo para calcular longitudes de scattering. Por último, aplicamos lo anterior para el cálculo a nivel árbol de las longitudes de scattering a_0^0 , a_0^2 y a_1^1 (con isospín definido, dado por el índice superior), y además encontramos las correcciones térmicas para las dos primeras en el rango de temperatura de 0 a 150 MeV.

Finalmente comparamos nuestros resultados con otros análisis independientes, obtenidos en el contexto de teoría quiral de perturbaciones y el modelo de Nambu-Jona-Lasinio.

Capítulo 1

Formalismo de Temperatura Finita

1.1. Mecánica Estadística Cuántica

Se comenzará el presente trabajo introduciendo algunos conceptos básicos de Mecánica Estadística Cuántica.

Se define la función partición $Z(\beta)$ de un sistema de la siguiente forma:

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \text{Tr}\rho(\beta) \quad (1.1)$$

donde H es un Hamiltoniano apropiado dependiente del ensemble que se trate, β es el inverso de la temperatura y ρ es la matriz densidad. Por ejemplo para un ensemble canónico $H = \mathcal{H}$ y para uno gran canónico $H = \mathcal{H} - \mu N$ donde \mathcal{H} es el Hamiltoniano dinámico, N el operador número y μ el potencial químico.

El promedio de un operador A en un sistema en equilibrio se define como:

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} A}{\text{Tr} e^{-\beta H}}. \quad (1.2)$$

El promedio térmico de la función de correlación de 2 operadores A y B con diferentes coordenadas se puede escribir de forma similar

$$\langle AB \rangle_\beta = \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} AB}{\text{Tr} e^{-\beta H}}. \quad (1.3)$$

Para un operador arbitrario A en el cuadro de Schrodinger (como los anteriores), podemos construir un operador A_H en el cuadro de Heisenberg el cual se relaciona con el anterior de la siguiente forma:

$$A_H(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (1.4)$$

Ahora, para una función de correlación de dos operadores en el cuadro de Heisenberg tenemos:

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) B_H(t') \rangle_\beta &= \text{Tr } \rho(\beta) A_H(t) B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr } e^{-\beta H} A_H(t) B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr } e^{-\beta H} A_H(t) e^{\beta H} e^{-\beta H} B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr } A_H(t + i\beta) e^{-\beta H} B_H(t') \\ &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr } e^{-\beta H} B_H(t') A_H(t + i\beta) \\ &= \langle B_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta \end{aligned}$$

donde se ha usado la propiedad cíclica de la traza. La relación anterior se conoce como relación de Kubo-Martin-Schwinger. En particular,

$$\langle A_H(t) A_H(t') \rangle_\beta = \langle A_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta \quad (1.5)$$

la condición anterior va a implicar la (anti) periodicidad de las funciones de Green (fermiónicas) bosónicas a temperatura finita. [2]

1.2. Propagadores a temperatura finita

En esta sección se derivarán los propagadores térmicos en el formalismo de Matsubara (tiempo imaginario) para luego obtenerlos en el formalismo de tiempo real, que fue el utilizado en este trabajo. Utilizaremos $\hbar = c = k_B = 1$ así como la métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$.

Notamos que la forma del operador de evolución temporal es similar al de la matriz densidad. Este es el hecho crucial en la construcción de una teoría de campos a temperatura finita. Aprovechando esa similitud desechamos la variable temporal en favor del inverso de la temperatura (notar que en este contexto tienen las mismas unidades). De esta forma la primera componente del cuadvectores posición x^μ será τ que recorrerá el intervalo $[0, -i\beta]$ llamado contorno de Matsubara [3]. Es por esta razón que el formalismo de tiempo imaginario es ampliamente utilizado para estudiar propiedades estáticas de un sistema cuántico, no así para fenómenos fuera del equilibrio.

De manera similar a lo que se hace a temperatura cero, las funciones de Green térmicas se definen como la función de correlación de campos ordenados temporalmente. Ahí hay

un matiz, puesto que el ordenamiento temporal en este contexto es sobre el contorno de Matsubara.

$$G_\beta(x_1, \dots, x_j) = \frac{\text{Tr } e^{-\beta H} T(\phi(x_1) \dots \phi(x_j))}{\text{Tr } e^{-\beta H}} = \langle T(\phi(x_1) \dots \phi(x_j)) \rangle_\beta \quad (1.6)$$

1.2.1. Propagadores de campos escalares

La función de Green de 2 puntos a temperatura finita de un campo escalar es

$$\Delta_\beta(x - y) = \langle T(\varphi(x)\varphi(y)) \rangle_\beta \quad (1.7)$$

esta función de Green satisface para campos no interactuantes

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta_\beta(x - y) = -\delta(x_o - y_o)\delta^3(x - y). \quad (1.8)$$

Como ya mencionamos la variable tiempo es reemplazada en favor de β por lo que $0 \leq x_o, y_o \leq -i\beta$.

Definimos el operador de ordenamiento temporal de la siguiente forma

$$\langle T(\varphi(x)\varphi(y)) \rangle_\beta = \begin{cases} \langle (\varphi(x)\varphi(y)) \rangle_\beta \equiv \Delta_\beta^>(x - y), & \text{si } ix_o > iy_o \\ \langle (\varphi(y)\varphi(x)) \rangle_\beta \equiv \Delta_\beta^<(x - y), & \text{si } ix_o < iy_o \end{cases}$$

Se subentiende que nos estamos refiriendo a propagadores térmicos por lo que desde ahora se omitirán los subíndices β para los propagadores por simplicidad.

Entonces

$$\Delta(x - y)|_{x_o=0} = \Delta^<(x - y)|_{x_o=0} \quad (1.9)$$

$$\Delta(x - y)|_{x_o=-i\beta} = \Delta^>(x - y)|_{x_o=-i\beta} \quad (1.10)$$

En la parte temporal y usando (1.9) y (1.10) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta(x_o - y_o)|_{x_o=0} &= \langle (\varphi(y_o)\varphi(0)) \rangle_\beta \\ \Delta(x_o - y_o)|_{x_o=-i\beta} &= \langle (\varphi(-i\beta)\varphi(y_o)) \rangle_\beta \end{aligned}$$

Ahora usando la condición de Kubo-Martin-Schwinger

$$\langle (\varphi(-i\beta)\varphi(y_o)) \rangle_\beta = \langle (\varphi(y_o)\varphi(0)) \rangle_\beta$$

con lo que obtenemos la siguiente condición de borde para el eje temporal

$$\Delta(x-y)|_{x_o=0} = \Delta(x-y)|_{x_o=-i\beta} \quad (1.11)$$

Con el fin de obtener el propagador en el espacio de momentum, definimos $\Delta(p)$ como la transformada de Fourier de $\Delta(x-y)$

$$\Delta(p) = \int_0^{-i\beta} dx_o \int d^3x e^{ipx} \Delta(x) \quad (1.12)$$

con $p^\mu = (\omega_n, \vec{p})$ donde $\omega_n = \frac{2\pi n}{-i\beta}$ [2] son cantidades discretas al ser el eje temporal periódico llamadas frecuencias de Matsubara.

La transformada inversa va a ser la siguiente:

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{-i\beta} \sum_n e^{-i\omega_n(x_o-y_o)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \Delta(p) \quad (1.13)$$

usando que $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ y la representación vía serie de Fourier de la delta

$$\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-i}{2\beta} e^{\frac{\pi n x}{\beta}}$$

insertamos (1.13) en (1.8) y resolvemos para $\Delta(p)$ obteniendo el propagador en el formalismo de tiempo imaginario

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (1.14)$$

La representación en tiempo real del propagador la obtenemos usando transformadas de Fourier. De esta forma

$$\bar{\Delta}^{\geq}(p) = \int d^4x e^{ipx} \Delta^{\geq}(x) \quad (1.15)$$

Estas transformadas están relacionadas

$$\bar{\Delta}^<(p) = \int d^4x e^{ip_o x_o - \vec{p}\cdot\vec{x}} \Delta^<(x)$$

Usando nuevamente la condición KMS

$$\bar{\Delta}^<(p) = \int d^4x e^{ip_o x_o - \vec{p}\cdot\vec{x}} \Delta^>(x_o - i\beta, \vec{x}),$$

y haciendo el cambio de variable $x_o \rightarrow x_o - i\beta$ obtenemos que

$$\bar{\Delta}^<(p) = e^{-\beta p_o} \int d^4x e^{ip_o x_o - \vec{p}\cdot\vec{x}} \Delta^>(x_o, \vec{x}),$$

con lo que

$$\bar{\Delta}^<(p) = e^{-\beta p_0} \bar{\Delta}^>(p). \quad (1.16)$$

Luego de esto, definimos la función espectral

$$\rho(p) = \bar{\Delta}^>(p) - \bar{\Delta}^<(p) \quad (1.17)$$

y además $\bar{\Delta}^<(p) = f(p_0)\rho(p)$ con lo que $\bar{\Delta}^>(p) = (1 + f(p_0))\rho(p)$. Usando lo anterior y (1.16) resolvemos para $f(p_0)$ y obtenemos:

$$f(p_0) = n_B(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \quad (1.18)$$

que es la distribución de Bose-Einstein.

Luego,

$$\bar{\Delta}(p) = \int d^4x e^{ipx} (H(x_0)\Delta^>(x) + H(-x_0)\Delta^<(x))$$

Ahora usando la representación integral de la función escalón H

$$H(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + i\epsilon} e^{-ix\tau} d\tau$$

$$\bar{\Delta}(p) = \int d^4x e^{ipx} (\Delta^>(x) i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{2\pi} \frac{e^{-ix_o(k_o - p_o)}}{k_o - p_o + i\epsilon} + \Delta^<(x) i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{2\pi} \frac{e^{ix_o(k_o - p_o)}}{k_o - p_o + i\epsilon})$$

Haciendo el cambio de variable $k_o - p_o \rightarrow p_o - k_o$ en la primera integral y el hecho que $e^{ipx} e^{i(k_o - p_o)x_o} = e^{i(k_o x_o - \vec{p} \cdot \vec{x})}$, entonces

$$\bar{\Delta}(p) = \frac{i}{2\pi} \int d^4x e^{ipx} (\Delta^<(x) \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \frac{e^{ix_o(k_o - p_o)}}{k_o - p_o + i\epsilon} - \Delta^>(x) \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \frac{e^{ix_o(k_o - p_o)}}{k_o - p_o - i\epsilon})$$

$$\bar{\Delta}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \left(\frac{\Delta^>(k_o, \vec{p})}{p_o - k_o + i\epsilon} - \frac{\Delta^<(k_o, \vec{p})}{p_o - k_o - i\epsilon} \right)$$

Recordando que $\bar{\Delta}^<(p) = f(p_0)\rho(p)$ y $\bar{\Delta}^>(p) = (1 + f(p_0))\rho(p)$

$$\bar{\Delta}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \frac{\rho(k_o, \vec{p})}{p_o - k_o + i\epsilon} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{2\pi} \frac{n(k_o)\rho(k_o, \vec{p})\epsilon}{(p_o - k_o)^2 + \epsilon^2}$$

$$\bar{\Delta}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \frac{\rho(k_o, \vec{p})}{p_o - k_o + i\epsilon} + n(p_0)\rho(p) \quad (1.19)$$

donde en la segunda integral se usó que

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}. \quad (1.20)$$

Para seguir necesitamos la función espectral, la cuál podemos obtener a partir de la representación de tiempo imaginario.

$$\Delta(\omega_n, \vec{p}) = \int_0^{-i\beta} dx_o e^{i\omega_n x_o} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Delta(x)$$

Como $\Delta(x-y)|_{y=0} = \Delta^>(x-y)|_{y=0}$ para x_o en el intervalo $[0, -i\beta]$

$$\Delta(\omega_n, \vec{p}) = \int_0^{-i\beta} dx_o e^{i\omega_n x_o} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Delta^>(x)$$

$$\Delta^>(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik_o x_o} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Delta^>(k)$$

entonces

$$\Delta(\omega_n, \vec{p}) = \int_0^{-i\beta} dx_o \int \frac{dk_o}{2\pi} e^{i(\omega_n - k_o)x_o} \Delta^>(k) \quad (1.21)$$

Usando $\Delta^>(k) = (1 + n_B(k_o))\rho(k)$, y $e^{\beta\omega_n} = 1$, obtenemos que

$$\Delta(\omega_n, \vec{p}) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{2\pi} \frac{\rho(k)}{\omega_n - k_o}. \quad (1.22)$$

Para determinar $\rho(k)$, extendemos $\Delta(\omega_n, \vec{p})$ a una función continua $\Delta(p_o, \vec{p})$

$$\begin{aligned} \Delta(p_o + i\varepsilon, \vec{p}) - \Delta(p_o - i\varepsilon, \vec{p}) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{2\pi} \frac{\rho(k)}{p_o + i\varepsilon - k_o} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{2\pi} \frac{\rho(k)}{p_o - i\varepsilon - k_o} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_o}{\pi} \rho(k) \frac{\varepsilon}{(p_o - k_o)^2 + \varepsilon^2} \end{aligned}$$

y en límite $\varepsilon \rightarrow 0$, ocupamos (1.20)

$$\Delta(p_o + i\varepsilon, \vec{p}) - \Delta(p_o - i\varepsilon, \vec{p}) = \rho(p). \quad (1.23)$$

Usamos el propagador en tiempo imaginario (1.14), con lo que

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{i}{(p_o + i\varepsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} - \frac{i}{(p_o - i\varepsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} \\ &= \frac{\varepsilon p_o}{(\frac{1}{2}(p^2 - m^2))^2 + \varepsilon^2 p_o^2}. \end{aligned}$$

Tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos que

$$\rho(p) = 2\pi \text{sgn}(p_o) \delta(p^2 - m^2) \quad (1.24)$$

Para encontrar el propagador ocupamos lo anterior en la ec. 1.19

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}(p) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \frac{\text{sgn}(k_o) \delta(k_o^2 - \bar{p}^2 - m^2)}{p_o - k_o + i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_o|) \delta(p^2 - m^2) \\
 &= \frac{i}{(p_o + i\epsilon)^2 - \bar{p}^2 - m^2} + 2\pi n_B(|p_o|) \delta(p^2 - m^2) \\
 &= \frac{i}{p_o^2 - \bar{p}^2 - m^2 + 2p_o i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_o|) \delta(p^2 - m^2)
 \end{aligned}$$

el término ϵ^2 lo despreciamos puesto que formalmente hay que tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$. Definiendo una nueva variable $\epsilon' = 2p_o\epsilon$ obtenemos el propagador de Dolan-Jackiw [4] o de tiempo real para un campo escalar con cuádrimomentum p .

$$\bar{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon'} + 2\pi n_B(|p_o|) \delta(p^2 - m^2) \quad (1.25)$$

El análisis de los propagadores en el espacio de momentum simplifica mucho el cálculo de diagramas. De hecho, hace que los cálculos a temperatura finita sean completamente paralelos a los de temperatura cero. Los vértices están definidos de la misma forma. El cambio está en los propagadores que portan la dependencia de la temperatura.

Capítulo 2

Modelo Sigma Lineal y sus Reglas de Feynman

La simetría quiral es una simetría de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en el límite en que las masas de los quarks se anulan. Sabemos sin embargo, que las masas de los quarks son finitas. Sin embargo comparadas con la escala de masas de los hadrones, la masa de los quarks más livianos u y d son muy pequeñas. Por esta razón, la simetría quiral puede ser considerada una simetría aproximada de las interacciones fuertes. El estudio de la simetría quiral no nació con QCD sino mucho antes de su descubrimiento, cuando indicaciones fenomenológicas provenientes del decaimiento nuclear β sugerían su existencia.

De un modo aproximado diremos que la simetría quiral es una simetría exacta. Por el teorema de Noether tendremos que como resultado de esa simetría habrán dos cantidades conservadas: la corriente vectorial y axial (se diferencian en como transforman ante paridad). Veremos que la corriente vectorial se conserva exactamente, mientras que la axial sólo aproximadamente, esto es lo que en inglés se conoce como Partially Conserved Axial Current (PCAC).

Algo importante a destacar, es que la simetría asociada con la corriente axial (que por el momento consideramos exacta) está espontáneamente rota. Que una simetría esté espontáneamente rota quiere decir que el Lagrangiano posee la simetría, pero no así el estado fundamental. Por el teorema de Goldstone, una simetría espontáneamente rota viene asociada a la existencia de un bosón sin masa. En nuestro caso ese bosón de Goldstone es el pion. Si la simetría quiral fuese exacta, el pión no debería tener masa, pero como es sólo aproximada esperamos que la masa del pion sea finita, pero pequeña comparada con el resto de Hadrones.

A altas temperaturas o densidades se espera la restauración de simetría quiral. Como

consecuencia de esto no se esperan bosones de Goldstone y entonces los piones, si es que los hay adquirirán masa [5].

2.1. Modelo Sigma Lineal

Este modelo fue introducido por Gell-Mann y Levy [6] en 1960, mucho antes que QCD fuera conocida. La idea es replicar, a lo menos para bajas energías, las características enumeradas anteriormente de las interacciones fuertes. Para construir el modelo, el Lagrangiano debe ser un escalar de Lorentz y debe ser invariante ante las transformaciones vectoriales y axiales (\mathcal{L}_o). Luego de esto se agrega un término \mathcal{L}_1 que rompe explícitamente la simetría axial y que provee de masa al pion.

De esta forma

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi}[i\gamma_\mu\partial^\mu - g(\sigma + i\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)]\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\vec{\pi})^2] - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon c\sigma \quad (2.2)$$

de modo que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_1. \quad (2.3)$$

Acá ψ es un isodoublete fermiónico, y (σ, π) son mesones. σ es un escalar, $\vec{\pi}$ es un pseudo escalar y un triplete de isospín. γ y τ son las matrices de Dirac y Pauli respectivamente. El que el Hamiltoniano sea positivo demanda que $\lambda^2 > 0$. Por convención se elige $\lambda > 0$. Luego, asignamos las siguientes transformaciones bajo $SU(2)_V \times SU(2)_A$

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + \frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}\psi - \frac{i}{2}\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\psi \\ \sigma &\rightarrow \sigma - \vec{\beta}\cdot\vec{\pi} \\ \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi} - \vec{\alpha}\times\vec{\pi} + \sigma\vec{\beta} \end{aligned}$$

donde $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son los generadores de cada grupo $SU(2)$.

Hecho esto, la corriente vectorial viene dada por

$$V_\mu^i(x) = \frac{-\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\alpha^i(x)} = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\tau^i}{2}\psi + \varepsilon^{ijk}\pi^j\partial_\mu\pi^k \quad (2.4)$$

con divergencia $\partial^\mu V_\mu^i(x) = 0$, por lo que es una corriente conservada.

La corriente axial es

$$A_\mu^i(x) = \frac{-\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\beta^i(x)} = -\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi + \pi^i\partial_\mu\sigma - \sigma\partial_\mu\pi^i \quad (2.5)$$

y su divergencia

$$\partial^\mu A_\mu^i(x) = \frac{-\delta\mathcal{L}}{\delta\beta^i(x)} = \frac{-\delta\mathcal{L}_1}{\delta\beta^i(x)} = \varepsilon c\pi^i(x). \quad (2.6)$$

Como vemos efectivamente el término \mathcal{L}_1 es el que rompe explícitamente la simetría quiral. Confirmamos que el modelo implica una realización de PCAC.

La masa de un nucleón es demasiado grande para ser simplemente el resultado del rompimiento explícito de la simetría quiral. Este debe ser pequeño con el objeto que la corriente axial sea parcialmente conservada. Sin embargo, una forma de darle masa a los nucleones sin romper la simetría quiral es explotar su acoplamiento con el mesón sigma. Notamos que el término de masa nucleónico es $\bar{\psi}g\sigma\psi$, por lo que necesitamos que σ tenga un valor de expectación en el vacío no nulo. Luego como \mathcal{L}_1 es lineal en el campo σ la condición anterior queda cubierta.

Sea v el valor de expectación de σ en el vacío

$$\langle \sigma \rangle_o = v \quad (2.7)$$

Definimos un nuevo campo s , de tal forma que $\sigma = s + v$, con lo que

$$\langle s \rangle_o = 0 \quad (2.8)$$

Ahora reescribimos el Lagrangiano (2.3) en términos del nuevo campo s

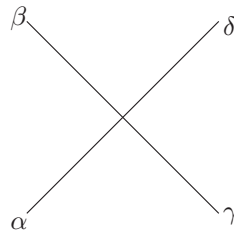
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - g(s + i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\gamma_5)]\psi + \frac{1}{2}[(\partial\vec{\pi})^2 + m_\pi^2\vec{\pi}^2] + \frac{1}{2}[(\partial\sigma)^2 + m_\sigma^2s^2] \\ & - \lambda^2vs(s^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(s^2 + \vec{\pi}^2)^2 + (\varepsilon c - vm_\pi^2)s \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hemos usado $m = gv$, $m_\pi^2 = \mu^2 + \lambda^2v^2$ y $m_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda^2v^2$. De ahora en adelante trabajaremos con esta versión desplazada del modelo.

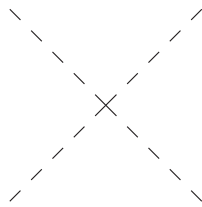
Este modelo ha sido estudiado a T finita por distintos autores, discutiendo la evolución de las masas, f_π y del vacío [7][8][9][10][11].

2.2. Reglas de Feynman

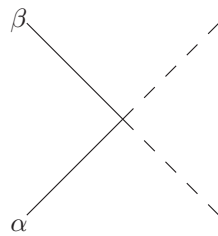
Del Lagrangiano (2.9) extraemos las reglas de Feynman del sector mesónico que nos serán de utilidad en el cálculo del scattering pion-pion [12].



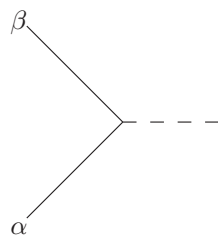
$$: -2i\lambda^2(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$



$$: -6i\lambda^2$$



$$: -2i\lambda^2\delta_{\alpha\beta}$$



$$: -2i\lambda^2 v\delta_{\alpha\beta}$$



Las líneas continuas representan piones y las líneas cortadas mesones σ . Los índices griegos son índices de isospín.

Capítulo 3

Formalismo de Scattering

La forma natural para aprender sobre las fuerzas que actúan entre partículas es observar las interacciones entre ellas. La mayoría de lo que sabemos sobre el mundo a pequeñas distancias ha sido inferido a través de experimentos de scattering. La idea es la siguiente; una partícula libre (o un haz de ellas) con características conocidas, interactúa con otras y emerge en un estado libre modificado. Para esto asumimos que las fuerzas entre las partículas tienen un rango limitado. Desde un punto de vista teórico, cuando se hacen predicciones observables en un proceso de scattering, sólo los estados libres asintóticos de la partícula scattreada son relevantes. Midiendo parámetros del nuevo estado emergente de la partícula obtenemos e inferimos la información.

De forma clásica, decimos que las partículas interactúan bajo un cierto potencial $V(r)$, que cumple $V(\infty)=0$. Para investigar las propiedades de scattering de $V(r)$, observamos los autoestados del Hamiltoniano del movimiento relativo entre las partículas con una energía positiva bien definida $E_k = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})\right)\psi_k = E_k \psi_k \quad (3.1)$$

Si b es el rango del potencial. Para $|r| \gg b$ buscamos una solución para ψ_k , de forma que obedezca las condiciones de borde asintóticas, por lo que

$$\psi_k \sim e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.2)$$

Observamos que esta solución es la superposición de una onda plana de momentum \vec{k} propagándose en la dirección z con una onda esférica. Claramente, la onda plana corresponde al haz incidente y la onda esférica al haz scattreado.

La función $f(\theta, \phi)$ es llamada amplitud de scattering puesto que la sección eficaz diferencial es $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$. $f(\theta, \phi)$ contiene toda la información del centro dispersor.

3.1. Operadores de proyección de Isospín

Desde los primeros días de la física nuclear se observó que los componentes del núcleo, el protón y el neutrón, mostraban una gran similitud en sus propiedades bajo la interacción fuerte. Aparte de su leve diferencia de masas, el protón y el neutrón parecen tener las mismas características, salvo que el protón está cargado y el neutrón es neutro. Experimentos de scattering han revelado que las interacciones fuertes actuando entre protón-protón, neutrón-neutrón y protón-neutrón son similares, y los estados de momento angular y spin son los mismos. Este hecho es conocido como "independencia de carga" de las fuerzas nucleares. Por supuesto, se descarta el efecto conocido de las interacciones electromagnéticas. Luego, lo anterior puede ser explicado mediante algún principio de simetría. Para partir consideramos al protón y al neutrón como dos posibles estados de una partícula que llamaremos nucleón. Los autoestados de un nucleón dependerán de su coordenada espacial r y su variable de spin s . Para distinguir entre los dos posibles estados (positivo o neutral) introducimos otra variable z que llamaremos isospín. En este contexto z es una variable binaria, que puede tomar los valores -1 ó 1 (por ejemplo) solamente [13]. La idea de isospín fue introducida por Heisenberg.

Como mencionamos anteriormente el campo $\vec{\pi}$ es un triplete de isospín. De esta forma $m_z = 1$ para el π^+ , $m_z = 0$ para el π^0 y $m_z = -1$ para el π^- (m_z es el autovalor de I_z). Viendo las reglas de Feynman de la sección 2.2, observamos que en el caso de los piones (el mesón σ es un isoscalar) estas reglas vienen etiquetadas con índices de isospín. Aprovechando eso, deseamos encontrar amplitudes de scattering con isospín definido. Para lograr ese objetivo se introducirán operadores de proyección de isospín. Cualquier amplitud de scattering pion-pion, de cualquier diagrama, puede ser descompuesta de la siguiente manera [14]

$$T_{\alpha\beta;\delta\gamma} = A(s, t, u)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} + A(t, s, u)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + A(u, t, s)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \quad (3.3)$$

Definimos los operadores de proyección:

$$P_0 = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} \quad (3.4)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \quad (3.5)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma}) \quad (3.6)$$

P_0 es simplemente la traza, o sea un escalar. P_1 produce tensores antisimétricos (3 componentes independientes) que corresponden al canal $I = 1$. Por último P_2 produce

tensores simétricos, los cuales tienen 6 componentes independientes, pero le restamos la traza con lo cual nos quedan sólo 5 que corresponden al canal $I = 2$. Los factores numéricos de los proyectores están puestos de tal modo que las amplitudes resultantes estén multiplicadas por su multiplicidad de Isospín. No deseamos esos coeficientes, por lo que hay que dividir por la multiplicidad, con lo cual

$$T^I(s, t, u) = \frac{P_I}{g_I} T_{\alpha\beta;\delta\gamma}(s, t, u) \quad (3.7)$$

Con g_I multiplicidad de estados de isospín ($g_0 = 1$, $g_1 = 3$, $g_2 = 5$).

De esta forma y considerando que $\delta_{\lambda\pi}\delta_{\lambda\pi} = 3$

$$T^0 = 3A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s) \quad (3.8)$$

$$T^1 = A(t, s, u) - A(u, t, s) \quad (3.9)$$

$$T^2 = A(t, s, u) + A(u, t, s) \quad (3.10)$$

3.2. Expansión de T^I en ondas parciales

Como el pión y el mesón sigma son partículas escalares, el momento angular total del estado inicial es igual al momento angular relativo entre las dos partículas. Como el momento angular es una cantidad conservada, es conveniente considerar la amplitud de scattering para cada estado de momento angular separadamente, las llamadas amplitudes de ondas parciales.

Para partículas escalares la dependencia angular de la función de onda que describe un estado con momento angular \hat{L} está dada por los polinomios de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$, con θ el ángulo de scattering [15]. De esta forma la expansión es la siguiente [16]

$$f(\theta) = 32\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_\ell(\cos\theta) A_\ell \quad (3.11)$$

y para una amplitud de isospín definido

$$T^I(s, t, u) = 32\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_\ell(\cos\theta) T_\ell^I(s) \quad (3.12)$$

En lo anterior se introdujeron las variables de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_3 - p_1)^2$ y $u = (p_4 - p_1)^2$, donde p_1 y p_2 son los momenta incidentes, y p_3 y p_4 los momenta salientes.

Invirtiendo (3.12), usando relaciones de completitud de los polinomios de Legendre $\int_{-1}^1 P_{\ell'}(z)P_{\ell}(z)dz = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}$ [15], obtenemos para las amplitudes de onda parcial

$$T_{\ell}^I(s) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_{\ell}(\cos\theta) T^I(s, t, u) \quad (3.13)$$

Bajo el umbral de scattering inelástico, la amplitud de onda parcial se puede parametrizar de la manera siguiente [16]

$$T_{\ell}^I = \left(\frac{s}{s - 4m\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_{\ell}^I(s)} - 1), \quad (3.14)$$

donde $\delta_{\ell}^I(s)$ son los corrimientos de fase de la onda scattreada producto de la interacción y que contiene toda la información sobre ella.

3.3. Longitudes de scattering

Las longitudes de scattering son los parámetros más importantes que gobiernan las interacciones de bajas energías.

En efecto, en este régimen la amplitud de onda parcial (3.14) puede ser expandida de la siguiente forma [14]

$$\Re(T_{\ell}^I) = \left(\frac{p^2}{m_{\pi}^2}\right)^{\ell} (a_{\ell}^I + \frac{p^2}{m_{\pi}^2} b_{\ell}^I + \dots) \quad (3.15)$$

donde $p^2 \equiv \frac{s-4m\pi^2}{4}$. Los parámetros a_{ℓ}^I y b_{ℓ}^I son llamados longitudes de scattering y pendientes respectivamente.

Para bajas energías, la expansión vía ondas parciales de las amplitudes de scattering tiene la gran ventaja que sólo los primeros términos de la expansión (3.12) son relevantes. Clásicamente lo podemos ver de esta manera; si b es el rango de la interacción, sólo hay scattering si $r \leq b$, lo que implica que $kr \leq kb \rightarrow \ell \leq kb$ para que aporte a la amplitud.

Podemos ver de (3.12) que si sólo tomamos el término $\ell = 0$ de la expansión, la amplitud no depende del ángulo de scattering. En otras palabras el scattering a bajas energías es isotrópico. Esto tiene una interpretación física, y es debido a que las ondas asociadas con las partículas incidentes son muy grandes respecto a b , por lo que no la pueden resolver.

En este contexto se introduce el concepto de longitudes de scattering, cuya definición típica en física nuclear (allí la convención de signo es al revés) es [13]

$$a = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0}{p} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{p}$$

Esta definición la extendemos para un momento angular arbitrario ℓ .

$$a_\ell = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_\ell}{p} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\delta_\ell}{p} \quad (3.16)$$

Por las razones antes expuestas en general $|a_0| > |a_1| > |a_2| \dots$. Estos parámetros son los que están presentes en (3.15).

Capítulo 4

Cálculo de Longitudes de Scattering

4.1. Cálculo a nivel árbol

El proceso de scattering $\pi^\alpha + \pi^\beta \rightarrow \pi^\delta + \pi^\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ índices de isospín (componente z) con autovalores $-1, 0, 1$) puede ocurrir mediante cuatro mecanismos en este modelo: scattering directo y a través de los canales s , t y u , en procesos que involucran un propagador del mesón σ . El proceso de scattering es claro que puede ocurrir a través de los canales de isospín $I = 0, 1, 2$.

Ocupando las reglas de Feynman (sección 2.2), tenemos que la amplitud de scattering en los distintos canales es

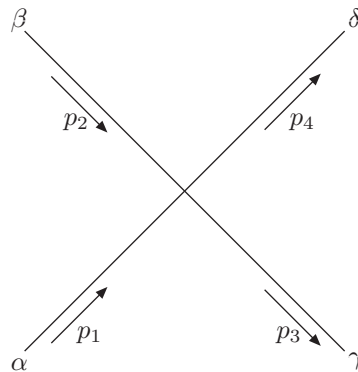


Figura 4.1: Diagrama nivel árbol scattering directo

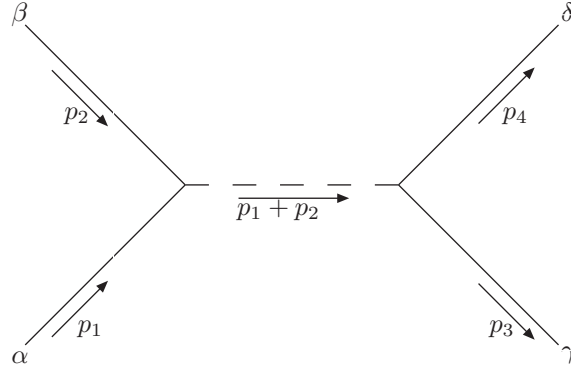


Figura 4.2: Diagrama nivel árbol canal s

$$i\mathcal{M}_o = -2i\lambda^2(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \quad (4.1)$$

$$i\mathcal{M}_s = (-2i\lambda^2 v \delta_{\alpha\beta}) \left(\frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m_\sigma^2} \right) (-2i\lambda^2 v \delta_{\gamma\delta}) = \frac{-4i\lambda^4 v^2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}}{s - m_\sigma^2} \quad (4.2)$$

$$i\mathcal{M}_t = (-2i\lambda^2 v \delta_{\alpha\gamma}) \left(\frac{i}{(p_3 - p_1)^2 - m_\sigma^2} \right) (-2i\lambda^2 v \delta_{\beta\delta}) = \frac{-4i\lambda^4 v^2 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}}{t - m_\sigma^2} \quad (4.3)$$

$$i\mathcal{M}_u = (-2i\lambda^2 v \delta_{\alpha\delta}) \left(\frac{i}{(p_4 - p_1)^2 - m_\sigma^2} \right) (-2i\lambda^2 v \delta_{\beta\gamma}) = \frac{-4i\lambda^4 v^2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}}{u - m_\sigma^2} \quad (4.4)$$

La amplitud total es

$$T_{\alpha\beta;\gamma\delta} = -(2\lambda^2 + \frac{4\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2}) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - (2\lambda^2 + \frac{4\lambda^4 v^2}{t - m_\sigma^2}) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - (2\lambda^2 + \frac{4\lambda^4 v^2}{u - m_\sigma^2}) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (4.5)$$

donde se han ocupado las variables de Mandelstam definidas en el capítulo anterior. Luego, ocupando la descomposición de la amplitud (3.3), identificamos

$$A(s, t, u) = -(2\lambda^2 + \frac{4\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2}) \quad (4.6)$$

$$A(t, s, u) = -(2\lambda^2 + \frac{4\lambda^4 v^2}{t - m_\sigma^2}) \quad (4.7)$$

$$A(u, t, s) = -(2\lambda^2 + \frac{4\lambda^4 v^2}{u - m_\sigma^2}) \quad (4.8)$$

Usando lo anterior y las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10) proyectamos a amplitudes con isospín definido

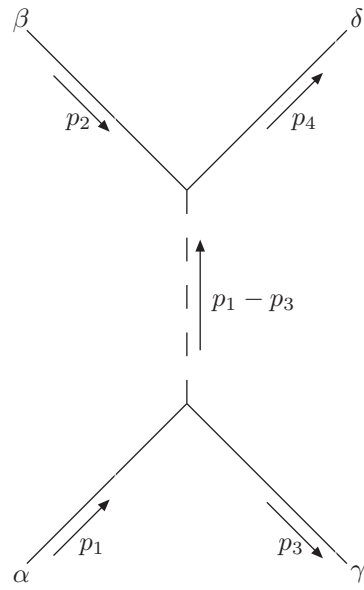


Figura 4.3: Diagrama nivel árbol canal t

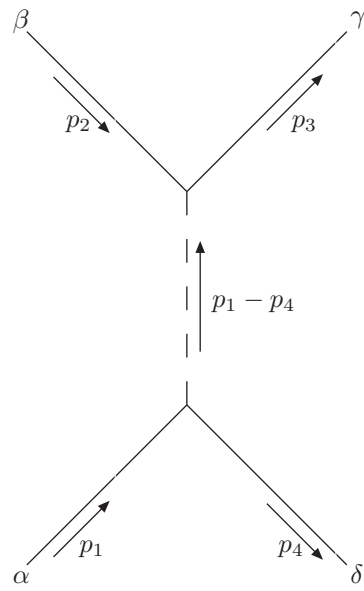


Figura 4.4: Diagrama nivel árbol canal u

$$T^0(s, t, u) = -10\lambda^2 - \frac{12\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2} - \frac{4\lambda^4 v^2}{t - m_\sigma^2} - \frac{4\lambda^4 v^2}{u - m_\sigma^2} \quad (4.9)$$

$$T^1(s, t, u) = \frac{4\lambda^4 v^2}{u - m_\sigma^2} - \frac{4\lambda^4 v^2}{t - m_\sigma^2} \quad (4.10)$$

$$T^2(s, t, u) = -4\lambda^2 - \frac{4\lambda^4 v^2}{t - m_\sigma^2} - \frac{4\lambda^4 v^2}{u - m_\sigma^2} \quad (4.11)$$

Queremos las amplitudes anteriores en función del ángulo de scattering θ . Los cálculos se harán en el sistema de centro de masa.

Como las longitudes de scattering son parámetros de baja energía, consideramos que el scattering es elástico. De esta forma $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$ y

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{\vec{p}_1^2 + m_\pi^2}, 0, 0, |\vec{p}_1|) \\ p_2 &= (\sqrt{\vec{p}_1^2 + m_\pi^2}, 0, 0, -|\vec{p}_1|) \\ p_3 &= (\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_\pi^2}, |\vec{p}_3| \text{sen}\theta, 0, |\vec{p}_3| \text{cos}\theta) \\ p_4 &= (\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_\pi^2}, -|\vec{p}_3| \text{sen}\theta, 0, -|\vec{p}_3| \text{cos}\theta) \end{aligned}$$

Queremos expresar lo anterior en términos de las variables de Mandelstam, y en especial de $s = 4E^2$

$$t = (p_3 - p_1)^2 = p_3^2 + p_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 = -2\vec{p}_1^2(1 - \text{cos}\theta)$$

$$u = (p_4 - p_1)^2 = p_4^2 + p_1^2 - 2p_1 \cdot p_4 = -2\vec{p}_1^2(1 + \text{cos}\theta)$$

Con lo que obtenemos

$$s = 4E^2 \quad (4.12)$$

$$t = -\frac{s - 4m_\pi^2}{2}(1 - \text{cos}\theta) \quad (4.13)$$

$$u = -\frac{s - 4m_\pi^2}{2}(1 + \text{cos}\theta) \quad (4.14)$$

Además en términos de s

$$p_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{s}, 0, 0, \sqrt{s - 4m_\pi^2}) \quad (4.15)$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{s}, 0, 0, -\sqrt{s - 4m_\pi^2}) \quad (4.16)$$

$$p_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{s}, \sqrt{s - 4m_\pi^2} \text{sen}\theta, 0, \sqrt{s - 4m_\pi^2} \text{cos}\theta) \quad (4.17)$$

$$p_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{s}, -\sqrt{s - 4m_\pi^2} \text{sen}\theta, 0, -\sqrt{s - 4m_\pi^2} \text{cos}\theta) \quad (4.18)$$

Entonces, en estas nuevas variables

$$T^0(s) = -10\lambda^2 - \frac{12\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2} + \frac{8\lambda^4 v^2}{(s - 4m_\pi^2)(1 - \text{cos}\theta) + 2m_\sigma^2} + \frac{8\lambda^4 v^2}{(s - 4m_\pi^2)(1 + \text{cos}\theta) + 2m_\sigma^2} \quad (4.19)$$

$$T^1(s) = \frac{8\lambda^4 v^2}{(s - 4m_\pi^2)(1 - \text{cos}\theta) + 2m_\sigma^2} - \frac{8\lambda^4 v^2}{(s - 4m_\pi^2)(1 + \text{cos}\theta) + 2m_\sigma^2} \quad (4.20)$$

$$T^2(s) = -4\lambda^2 + \frac{8\lambda^4 v^2}{(s - 4m_\pi^2)(1 - \text{cos}\theta) + 2m_\sigma^2} + \frac{8\lambda^4 v^2}{(s - 4m_\pi^2)(1 + \text{cos}\theta) + 2m_\sigma^2} \quad (4.21)$$

Teniendo las amplitudes con isospín definido, tenemos dos opciones para proseguir y encontrar las longitudes de scattering. La primera es expandir a primer orden los denominadores de la parte de las amplitudes correspondientes a los canales t y u vía una serie geométrica y luego sustituir eso en la ec. (3.13) y así obtener la amplitud de onda parcial con isospín definido a bajas energías (no se puede hacer lo mismo con la parte de la amplitud correspondiente al canal s, pues s es una fracción apreciable de m_σ^2 [18]). La segunda opción es ocupar directamente (4.19), (4.20) y (4.21) en (3.13), lo que va a dar básicamente logaritmos, y luego usar que $\ln(1 + \delta) \approx \delta - \frac{\delta^2}{2} + \dots$ cuando $1 \gg \delta$. Ambas formas son equivalentes y dan los mismos resultados. Ocuparemos la primera para $I = 0, 2$ y la segunda para $I = 1$.

Para llegar a una expansión tipo (3.15), ocupamos que $\vec{p}^2 = \frac{s - 4m_\pi^2}{4}$. De esta forma y usando que $\frac{1}{\vec{p}^2 x + m_\sigma^2} \approx \frac{1}{m_\sigma^2} (1 - \frac{\vec{p}^2 x}{m_\sigma^2})$, ya que a bajas energías $\vec{p} \rightarrow \vec{0}$

$$T^0 \approx -10\lambda^2 - \frac{12\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2} + \frac{4\lambda^4 v^2}{m_\sigma^2} \left(1 - \frac{2\vec{p}^2(1 - \text{cos}\theta)}{m_\sigma^2}\right) + \frac{4\lambda^4 v^2}{m_\sigma^2} \left(1 - \frac{2\vec{p}^2(1 + \text{cos}\theta)}{m_\sigma^2}\right)$$

$$T^0 \approx -10\lambda^2 - \frac{12\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2} + \frac{8\lambda^4 v^2}{m_\sigma^2} - \frac{16\lambda^4 v^2 \vec{p}^2}{m_\sigma^4} \quad (4.22)$$

De la misma forma

$$T^2 \approx -4\lambda^2 + \frac{8\lambda^4 v^2}{m_\sigma^2} - \frac{16\lambda^4 v^2 \vec{p}^2}{m_\sigma^4} \quad (4.23)$$

Como se esperaba, se confirma que las amplitudes a bajas energías no dependen del ángulo de scattering.

Por el momento sólo nos interesarán las expansiones en $\ell = 0$ y $\ell = 1$.

Para obtener T_0^0 ocupamos T^0 en (3.13). La integración es trivial ya que $P_0(x) = 1$, con lo cual obtenemos en general

$$T_0^I = \frac{1}{32\pi} T^I \quad (4.24)$$

Lo que implica

$$T_0^0 = \frac{1}{32\pi} \left(-10\lambda^2 - \frac{12\lambda^4 v^2}{s - m_\sigma^2} + \frac{8\lambda^4 v^2}{m_\sigma^2} - \frac{16\lambda^4 v^2 \vec{p}^2}{m_\sigma^4} \right)$$

Ocupando los valores de las constantes de acoplamiento [12][17]

$$\lambda = \frac{m_\sigma}{\sqrt{2}f_\pi} \quad (4.25)$$

$$\lambda^2 v^2 = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2}, \quad (4.26)$$

con $f_\pi = 93$ Mev, la constante de decaimiento del pión.

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{-2\lambda^2}{32\pi} \left(5 + \frac{6\lambda^2 v^2}{s - m_\sigma^2} \right) + \frac{\lambda^4 v^2}{4\pi m_\sigma^2} - \frac{\lambda^4 v^2 \vec{p}^2}{2\pi m_\sigma^4} \\ &= \frac{-2\lambda^2 v^2}{32\pi v^2} \left(\frac{5s - 3m_\pi^2 - 2m_\sigma^2}{s - m_\sigma^2} \right) + \frac{\lambda^4 v^2}{4\pi m_\sigma^2} - \frac{\lambda^4 v^2 \vec{p}^2}{2\pi m_\sigma^4} \\ &= \frac{1}{32\pi} \left(-\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{v^2} \left(\frac{3(s - m_\pi^2)}{s - m_\sigma^2} + 2 \right) \right) + \frac{\lambda^4 v^2}{4\pi m_\sigma^2} - \frac{\lambda^4 v^2 \vec{p}^2}{2\pi m_\sigma^4} \\ &= \frac{1}{32\pi} \left(-\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{v^2} \left(\frac{3(s - 4m_\pi^2)}{s - m_\sigma^2} + \frac{9m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} - 2\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{m_\sigma^2} + 4\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)\vec{p}^2}{m_\sigma^4} \right) \right) \\ &= -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{32\pi v^2} \left(\left(\frac{12m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} + 4\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right) \frac{\vec{p}^2}{m_\pi^2} + \frac{9m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} + 2\frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

De lo anterior y (3.15) identificamos

$$a_0^0 = -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{32\pi v^2} \left(\frac{9m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} + 2\frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right)$$

$$b_0^0 = -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{32\pi v^2} \left(\frac{12m_\pi^2}{s - m_\sigma^2} + 4\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right)$$

A bajas energías $s \rightarrow 4m_\pi^2$. Además, últimas evidencias experimentales indican que $m_\sigma = 550$ MeV [18] ($m_\pi = 139$ MeV), por lo que $4m_\pi^2 \approx \frac{m_\sigma^2}{4}$. De esta forma

$$a_0^0 \approx -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{32\pi v^2} \left(\frac{-12m_\pi^2}{m_\sigma^2} + \frac{2m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right)$$

$$b_0^0 \approx -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{32\pi v^2} \left(\frac{-16m_\pi^2}{m_\sigma^2} + \frac{15m_\pi^2}{4m_\sigma^2} \right)$$

$$a_0^0 \approx \frac{10m_\pi^2}{32\pi f_\pi^2} \tag{4.27}$$

$$b_0^0 \approx \frac{49m_\pi^2}{128\pi f_\pi^2} \tag{4.28}$$

De la misma forma $T_0^2 = \frac{1}{32\pi} T^2$.

Ocupando (4.25) y (4.26) en (4.23) obtenemos

$$T_0^2 \approx -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{16\pi v^2} + \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)^2}{16\pi v^2 m_\sigma^2} - \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)^2 \vec{p}^2}{8\pi v^2 m_\sigma^4}$$

De lo cual identificamos

$$a_0^2 \approx -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{16\pi v^2} + \frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)^2}{16\pi v^2 m_\sigma^2}$$

$$= -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{16\pi v^2} \left(1 - \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{m_\sigma^2} \right)$$

$$= -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)m_\pi^2}{16\pi v^2 m_\sigma^2}$$

Con lo cual

$$a_0^2 \approx \frac{-m_\pi^2}{16\pi f_\pi^2} \tag{4.29}$$

De la misma forma

$$b_0^2 \approx -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)^2 m_\pi^2}{8\pi v^2 m_\sigma^4}$$

$$= -\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)m_\pi^2}{8\pi f_\pi^2 m_\sigma^2}$$

Ahora como $m_\sigma^2 \gg m_\pi^2$ aproximadamente obtenemos

$$b_0^2 \approx \frac{-m_\pi^2}{8\pi f_\pi^2} \tag{4.30}$$

Luego de obtenidos estos valores, nuestro próximo objetivo es encontrar las longitudes de scattering y pendientes del canal de momento angular $\ell = 1$.

Claramente, observando (3.13), $T_1^0 = T_1^2 = 0$ debido a que $P_1(x)$ es impar y T^0, T^2 no tienen dependencia angular en este límite. La única contribución no nula a la amplitud de momento angular $\ell = 1$ será T_1^1 , la cual calcularemos a partir de (4.20). Para ello definiremos las siguientes integrales

$$B_\ell = \frac{a}{64\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{P_\ell(x)}{b(1-x) + c} \quad (4.31)$$

$$C_\ell = \frac{a}{64\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{P_\ell(x)}{b(1+x) + c} \quad (4.32)$$

Donde en este caso $a = 8\lambda^4 v^2$, $b = (s - 4m_\pi^2)$, $c = 2m_\sigma^2$. Con eso en general

$$T_\ell^1 = B_\ell - C_\ell$$

Veamos la relación entre B_ℓ y C_ℓ . Hacemos el cambio de variable $x = -v$ en (4.31)

$$B_\ell = \frac{a}{64\pi} \int_{-1}^1 dv \frac{P_\ell(-v)}{b(1+v) + c}$$

Como los $P_\ell(x)$ tienen paridad $(-1)^\ell$, entonces $B_\ell = C_\ell$ si ℓ es par y $B_\ell = -C_\ell$ si ℓ es impar. Con este resultado claramente confirmamos que $T_1^0 = T_1^2 = 0$. De esta manera

$$T_1^1 = 2C_1 \quad (4.33)$$

resolviendo C_1 obtenemos

$$C_1 = \frac{a}{64\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{x}{b(1+x) + c} = \frac{a}{64\pi b^2} (2b - (b+c) \ln(\frac{2b+c}{c}))$$

Volviendo a nuestras variables

$$T_1^1 = -\frac{\lambda^4 v^2}{2\pi(s - 4m_\pi^2)} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{m_\sigma^2}{s - 4m_\pi^2}\right) \ln\left(1 + \frac{s - 4m_\pi^2}{m_\sigma^2}\right)\right) \quad (4.34)$$

De (3.15) vemos que la expansión ahora es la siguiente

$$T_1^1 = \left(\frac{\vec{p}^2}{m_\pi^2}\right) (a_1^1 + \frac{\vec{p}^2}{m_\pi^2} b_1^1) \quad (4.35)$$

Notamos que debemos expandir el logaritmo en (4.34) hasta tercer orden para lograr una expansión del tipo de (4.35)

	Experimental	Teoría Quiral de perturbaciones	Modelo Sigma Lineal
a_0^0	$0,26 \pm 0,05$	$\frac{7m_\pi^2}{32\pi f_\pi^2} = 0,16$	$\frac{10m_\pi^2}{32\pi f_\pi^2} = 0,22$
b_0^0	$0,25 \pm 0,03$	$\frac{m_\pi^2}{4\pi f_\pi^2} = 0,18$	$\frac{49m_\pi^2}{128\pi f_\pi^2} = 0,27$
a_0^2	$-0,028 \pm 0,012$	$\frac{-m_\pi^2}{16\pi f_\pi^2} = -0,044$	$\frac{-m_\pi^2}{16\pi f_\pi^2} = -0,044$
b_0^2	$-0,082 \pm 0,008$	$\frac{-m_\pi^2}{8\pi f_\pi^2} = -0,089$	$\frac{-m_\pi^2}{8\pi f_\pi^2} = -0,089$
a_1^1	$0,038 \pm 0,002$	$\frac{m_\pi^2}{24\pi f_\pi^2} = 0,030$	$\frac{m_\pi^2}{24\pi f_\pi^2} = 0,030$
b_1^1	—	0	$\frac{m_\pi^2}{48\pi f_\pi^2} = 0,015$

Cuadro 4.1: Comparación entre el valor experimental, las estimaciones teóricas de Teoría Quiral de Perturbaciones (a primer orden) y del Modelo Sigma Lineal (a nivel árbol)

$$\begin{aligned}
 T_1^1 &\approx \frac{-\lambda^4 v^2}{8\pi p^2} + \left(\frac{\lambda^4 v^2}{16\pi p^2} + \frac{\lambda^4 v^2 m_\sigma^2}{32\pi p^4} \right) \left(\frac{4p^2}{m_\sigma^2} - \frac{8p^4}{m_\sigma^4} + \frac{64p^6}{m_\sigma^6} \right) \\
 &= \frac{\lambda^4 v^2 p^2}{6\pi m_\sigma^4} + \frac{4\lambda^4 v^2 p^4}{3\pi m_\sigma^6}
 \end{aligned}$$

De donde identificamos

$$\begin{aligned}
 a_1^1 &\approx \frac{\lambda^4 v^2 m_\pi^2}{6\pi m_\sigma^4} \\
 b_1^1 &\approx \frac{4\lambda^4 v^2 m_\pi^4}{3\pi m_\sigma^6}
 \end{aligned}$$

Usando (4.25) y (4.26) obtenemos

$$a_1^1 \approx \frac{m_\pi^2}{24\pi f_\pi^2} \quad (4.36)$$

$$b_1^1 \approx \frac{m_\pi^2}{48\pi f_\pi^2} \quad (4.37)$$

En el cuadro 4.1 se muestran los valores experimentales [19] para las longitudes de scattering y pendientes, los resultados a primer orden en teoría quiral de perturbaciones [20] y nuestro resultado a nivel árbol en el modelo σ lineal.

4.2. Correcciones a 1 loop

Una forma equivalente, y en la práctica más sencilla de calcular longitudes de scattering con momento angular cero, es la que se presentará a continuación. Notamos que para poder calcular longitudes de scattering y pendientes con $\ell = 0$ había que expandir la serie

geométrica o el logaritmo (depende del método que empleásemos) a segundo orden con el fin de poder extraer b_0^I . Ahora si nuestro interés son sólo las longitudes de scattering a_0^I nos basta con un solo orden en la expansión o, lo que es equivalente, calcular la amplitud de scattering T^I en el límite estático, o sea cuando $s \rightarrow 4m_\pi^2$, $t \rightarrow 0$ y $u \rightarrow 0$. Por lo que podemos decir que [21]

$$a_0^I = \frac{1}{32\pi} T^I(s \rightarrow 4m_\pi^2, t \rightarrow 0, u \rightarrow 0) \quad (4.38)$$

Esto es equivalente a decir que los momenta entrantes y salientes son iguales a $p = (m_\pi, \vec{0})$. De las ecuaciones (4.22) y (4.23) (dividiendo por 32π) obtenemos inmediatamente (4.27) y (4.29) cuando $\vec{p} = \vec{0}$. Dicho esto, los pasos a seguir van a ser los siguientes: calcularemos todas las amplitudes de los diagramas posibles a un loop en el límite estático, considerando sólo los términos reales de la amplitud (por (3.15)) concentrándonos solamente en los efectos térmicos. Luego, ocupando los operadores de proyección de isospín y (4.38), obtendremos las longitudes de scattering con momento angular cero como función de la temperatura.

4.2.1. Amplitudes a 1-loop

Antes de todo un pequeño comentario. Debido a que m_σ es alrededor de 4 veces m_π , las contribuciones térmicas líderes van a provenir de las inserciones térmicas piónicas (las del σ se van a ver exponencialmente suprimidas). Es por esa razón que los propagadores que vamos a condiderar serán:

$$\Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\alpha\beta} = \left(\frac{i}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} + 2\pi n_B(|k_0|) \delta(k_0^2 - \vec{k}^2 - m_\pi^2) \right) \delta_{\alpha\beta} \quad (4.39)$$

$$\Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) = \frac{i}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m_\sigma^2 + i\epsilon} \quad (4.40)$$

Entonces viendo los diagramas relevantes a 1-loop (las amplitudes se etiquetarán con el número del diagrama correspondiente) las amplitudes van a ser las siguientes:

$$i\mathcal{M}_1 = (-2i\lambda^2)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'})(-2i\lambda^2)(\delta_{\gamma\delta}\delta_{\gamma'\delta'} + \delta_{\gamma\delta'}\delta_{\gamma'\delta} + \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\delta\delta'}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\alpha'\gamma'} \delta_{\beta'\delta'}$$

Veamos cuanto da el producto de las δ 's de isospín.

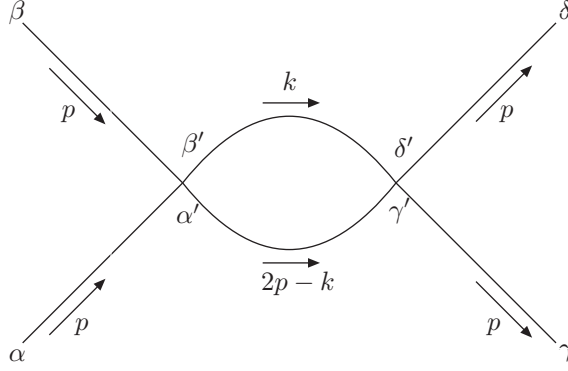


Figura 4.5: Diagrama uno

$$\begin{aligned}
 & \delta_{\alpha'\gamma'}\delta_{\beta'\delta'}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'}) (\delta_{\gamma\delta}\delta_{\gamma'\delta'} + \delta_{\gamma\delta'}\delta_{\gamma'\delta} + \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\delta\delta'}) \\
 &= (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'}) (\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha'\beta'} + \delta_{\gamma\beta'}\delta_{\alpha'\delta} + \delta_{\gamma\alpha'}\delta_{\delta\beta'}) \\
 &= (3\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\gamma\delta}) + (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + (\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}) \\
 &= (7\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})
 \end{aligned}$$

con lo que

$$i\mathcal{M}_1 = -4\lambda^4(7\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.41)$$

De la misma forma

$$i\mathcal{M}_2 = -4\lambda^4(7\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.42)$$

$$i\mathcal{M}_3 = -4\lambda^4(7\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.43)$$

Notamos que en este límite no hay ninguna diferencia entre las amplitudes 2 y 3, salvo la estructura de isospín que acompaña a los términos.

Viendo la figura (4.7) notamos que este diagrama tiene la misma estructura que el canal s a nivel árbol salvo que este caso la constante de acoplamiento va a estar modificada por efectos térmicos.

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_4 &= (-2i\lambda^2 v)\delta_{\alpha\alpha'}(-2i\lambda^2 v)\delta_{\beta\beta'}(-2i\lambda^2 v)\delta_{\alpha''\beta''}(-2i\lambda^2 v)\delta_{\delta\gamma} \left(\frac{i}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right) \\
 &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\alpha'\alpha''} \delta_{\beta'\beta''}
 \end{aligned}$$

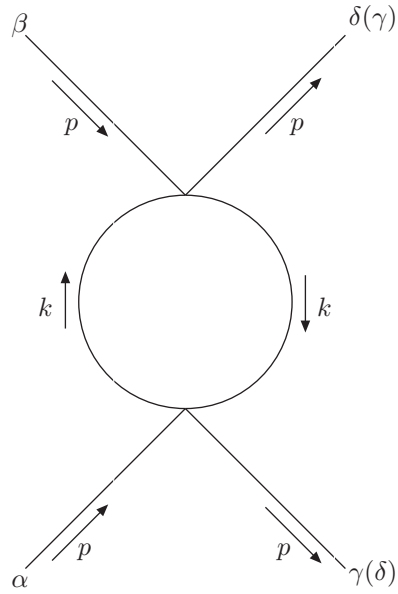


Figura 4.6: Diagrama dos (tres)

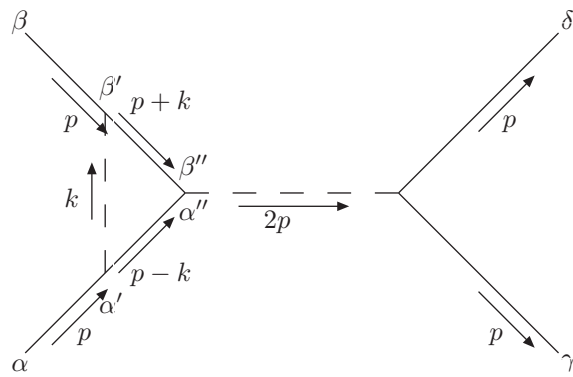


Figura 4.7: Diagrama cuatro

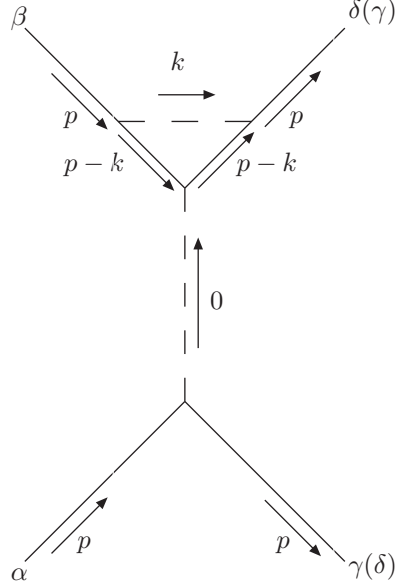


Figura 4.8: Diagrama cinco (seis)

$$i\mathcal{M}_4 = 16\lambda^8 v^4 \left(\frac{i}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.44)$$

Las amplitudes 5 y 6 van a tener la misma forma que la 4 salvo la diferencia en los propagadores y en la estructura de isospín.

$$i\mathcal{M}_5 = 16\lambda^8 v^4 \left(\frac{i}{-m_\sigma^2} \right) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.45)$$

$$i\mathcal{M}_6 = 16\lambda^8 v^4 \left(\frac{i}{-m_\sigma^2} \right) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.46)$$

Fijándonos en el diagrama 7 y en las reglas de Feynman de la sección 2.2 tenemos

$$i\mathcal{M}_7 = (-2i\lambda^2 v) \delta_{\alpha\beta} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\delta\gamma} (-2i\lambda^2) \delta_{\lambda\pi} \left(\frac{i}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\lambda\pi}$$

Usando el hecho que $\delta_{\lambda\pi} \delta_{\lambda\pi} = 3$ obtenemos para la amplitud 7

$$i\mathcal{M}_7 = -24i\lambda^6 v^2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \left(\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.47)$$

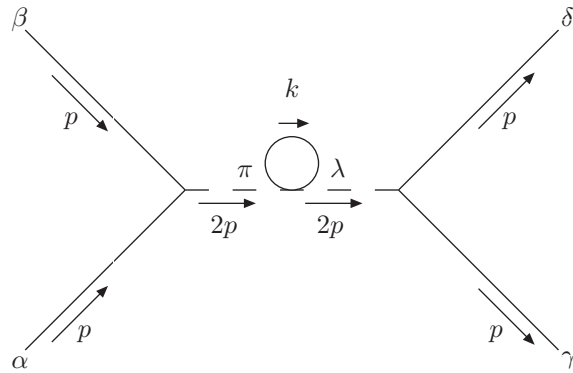


Figura 4.9: Diagrama siete

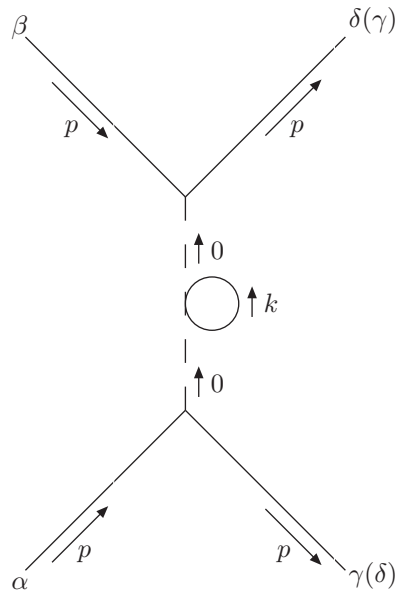


Figura 4.10: Diagrama ocho (nueve)

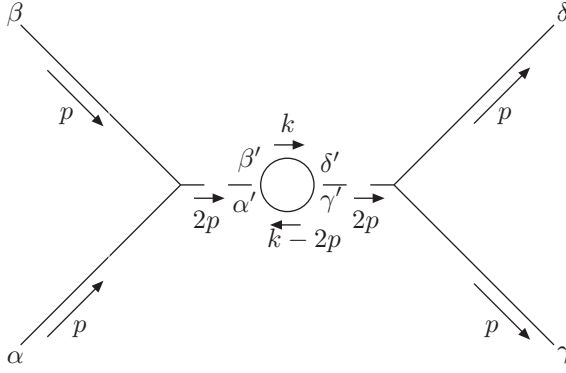


Figura 4.11: Diagrama diez

Es evidente que la única diferencia entre las amplitudes 8 y 9 con la amplitud 7 es el momentum transferido (en el límite estático), $2p$ en el último caso y 0 en los primeros. El loop va a ser el mismo.

$$i\mathcal{M}_8 = -24i\lambda^6 v^2 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \left(\frac{1}{-m_\sigma^2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.48)$$

$$i\mathcal{M}_9 = -24i\lambda^6 v^2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \left(\frac{1}{-m_\sigma^2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.49)$$

La amplitud 10 es la siguiente

$$i\mathcal{M}_{10} = (-2i\lambda^2 v) \delta_{\alpha\beta} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\delta\gamma} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\alpha'\beta'} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\gamma'\delta'} \left(\frac{i}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\alpha'\gamma'} \delta_{\beta'\delta'}$$

Veamos el producto de las deltas primadas

$$\delta_{\alpha'\beta'} \delta_{\gamma'\delta'} \delta_{\alpha'\gamma'} \delta_{\beta'\delta'} = \delta_{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha'\beta'} = 3$$

Entonces

$$i\mathcal{M}_{10} = -48\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \left(\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.50)$$

Es evidente que las amplitudes 11 y 12 se modificarán de forma análoga a como se modificaron 8 y 9 respecto a la amplitud 7.

$$i\mathcal{M}_{11} = -48\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \left(\frac{1}{-m_\sigma^2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.51)$$

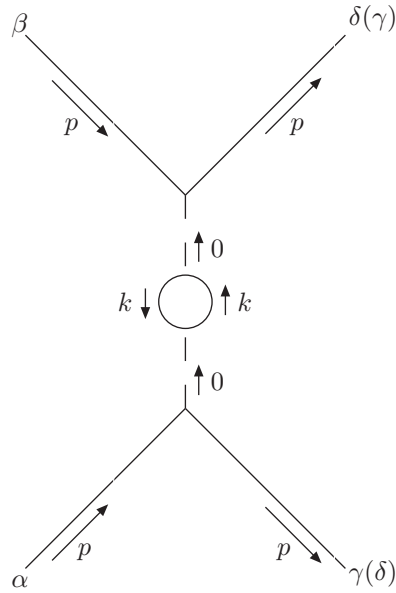


Figura 4.12: Diagrama once (doce)

$$i\mathcal{M}_{12} = -48\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \left(\frac{1}{-m_\sigma^2}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.52)$$

Observando los diagramas de caja 13 y 14 nos damos cuenta que las amplitudes son exactamente iguales en el límite en que estamos trabajando.

$$i\mathcal{M}_{13} = i\mathcal{M}_{14} = (-2i\lambda^2 v) \delta_{\alpha\alpha'} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\beta\beta'} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\delta\delta'} (-2i\lambda^2 v) \delta_{\gamma\gamma'} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \delta_{\alpha'\beta'} \delta_{\gamma'\delta'}$$

$$i\mathcal{M}_{13} = i\mathcal{M}_{14} = 16\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.53)$$

Parametrizando de forma conveniente podemos ver que los diagramas 15 y 16 son iguales salvo la estructura de isospín. Entonces en forma análoga a lo hecho con los diagramas de caja precedentes

$$i\mathcal{M}_{15} = 16\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.54)$$

$$i\mathcal{M}_{16} = 16\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.55)$$

De la misma forma que lo hecho en los últimos diagramas

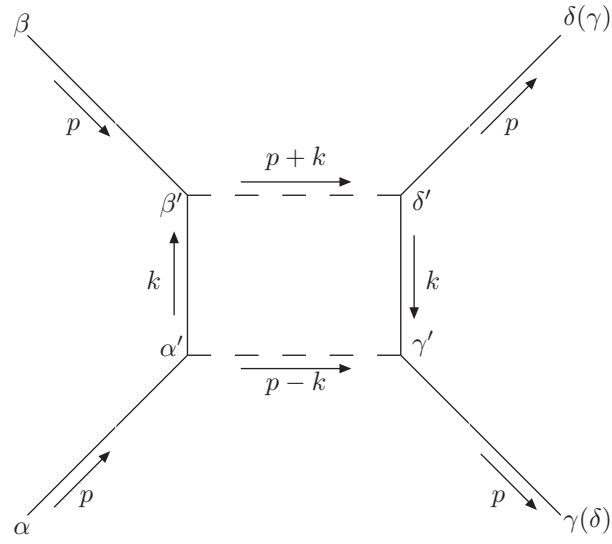


Figura 4.13: Diagrama trece (catorce)

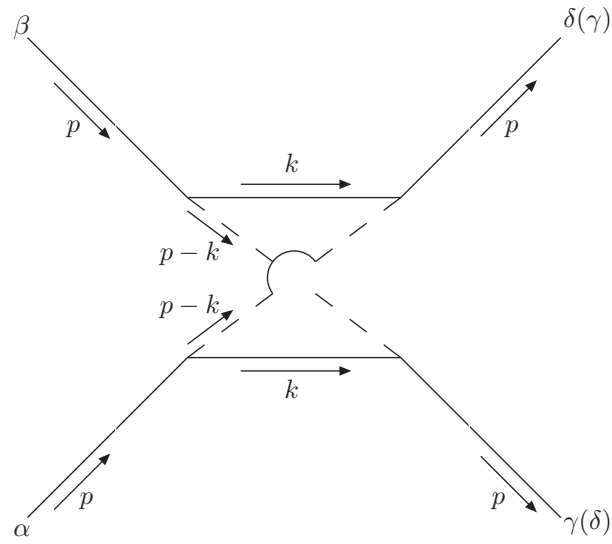


Figura 4.14: Diagrama quince (dieciseis)

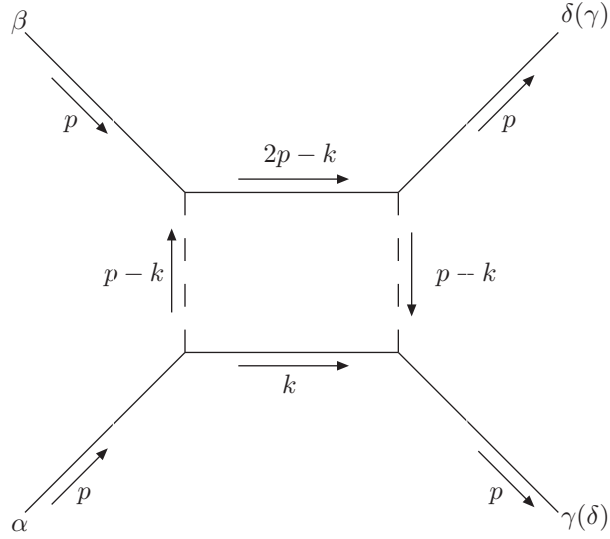


Figura 4.15: Diagrama diecisiete (dieciocho)

$$i\mathcal{M}_{17} = 16\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.56)$$

$$i\mathcal{M}_{18} = 16\lambda^8 v^4 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.57)$$

Las amplitudes 19, 20 y 21 se pueden interpretar análogamente a los diagramas 4, 5 y 6 como correcciones al acoplamiento de 4 puntos

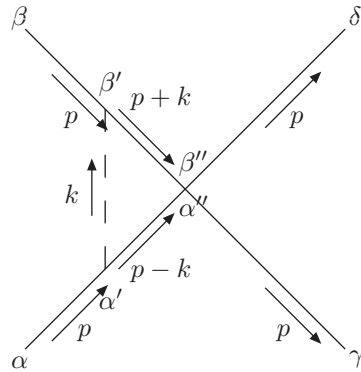


Figura 4.16: Diagrama diecinueve

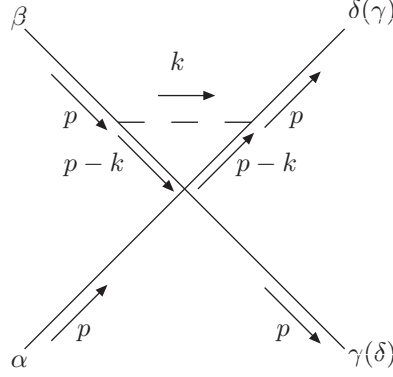


Figura 4.17: Diagrama veinte (veintiuno)

$$i\mathcal{M}_{19} = (-2i\lambda^2)(\delta_{\alpha''\beta''}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha''\delta}\delta_{\beta''\gamma} + \delta_{\alpha''\gamma}\delta_{\beta''\delta})(-2i\lambda^2v)\delta_{\beta\beta'}(-2i\lambda^2v)\delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\alpha'\alpha''} \delta_{\beta'\beta''}$$

Evaluemos el producto de las deltas de isospín

$$(\delta_{\alpha''\beta''}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha''\delta}\delta_{\beta''\gamma} + \delta_{\alpha''\gamma}\delta_{\beta''\delta})\delta_{\beta\beta'}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\alpha'\alpha''}\delta_{\beta'\beta''}$$

$$= (\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha'\delta}\delta_{\beta'\gamma} + \delta_{\alpha'\gamma}\delta_{\beta'\delta})\delta_{\beta\beta'}\delta_{\alpha\alpha'}$$

$$= (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta})$$

De esta forma

$$i\mathcal{M}_{19} = 8i\lambda^6 v^2 (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.58)$$

Los diagramas 20 y 21 son exactamente iguales en este límite

$$i\mathcal{M}_{20} = i\mathcal{M}_{21} = 8i\lambda^6 v^2 (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.59)$$

La amplitud del diagrama 22 es la siguiente

$$i\mathcal{M}_{22} = (-2i\lambda^2)(\delta_{\delta'\gamma'}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\delta'\gamma}\delta_{\gamma'\delta} + \delta_{\delta'\delta}\delta_{\gamma\gamma'})(-2i\lambda^2v)\delta_{\alpha\beta}(-2i\lambda^2v)\delta_{\alpha'\beta'} \frac{i}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \delta_{\alpha'\gamma'} \delta_{\beta'\delta'}$$

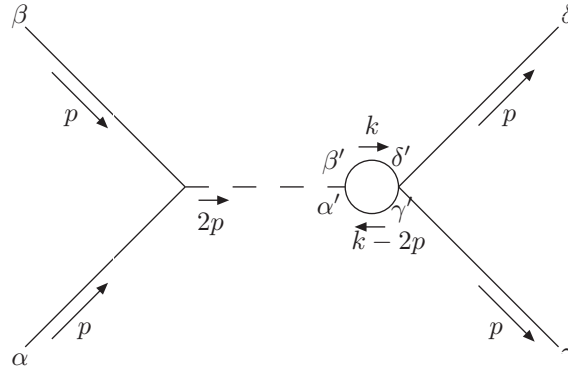


Figura 4.18: Diagrama veintidós

Para el producto de las deltas de isospín obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}(\delta_{\delta'\gamma'}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\delta'\gamma}\delta_{\gamma'\delta} + \delta_{\delta'\delta}\delta_{\gamma\gamma'})\delta_{\alpha'\gamma'}\delta_{\beta'\delta'} \\
 & = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'}(\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\beta'\gamma}\delta_{\alpha'\delta} + \delta_{\beta'\delta}\delta_{\gamma\alpha'}) \\
 & = (3\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}) \\
 & = 5\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}
 \end{aligned}$$

Entonces

$$i\mathcal{M}_{22} = -40\lambda^6 v^2 \frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.60)$$

De forma análoga, para 23 y 24 tenemos

$$i\mathcal{M}_{23} = -40\lambda^6 v^2 \frac{1}{-m_\sigma^2} \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.61)$$

$$i\mathcal{M}_{24} = -40\lambda^6 v^2 \frac{1}{-m_\sigma^2} \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.62)$$

Para el resto de diagramas los productos de las deltas de isospín son triviales; incluso se pueden resolver de forma gráfica viendo que índices de isospín están conectados vía los propagadores piónicos. Por esa razón las amplitudes siguientes se escribirán en su forma final.

$$i\mathcal{M}_{25} = -8\lambda^6 v^2 \frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.63)$$

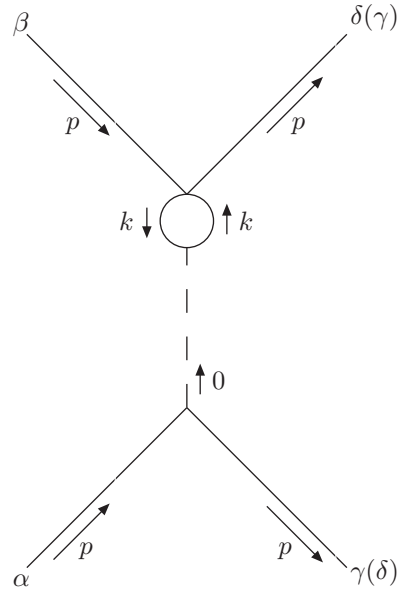


Figura 4.19: Diagrama veintitrés (veinticuatro)

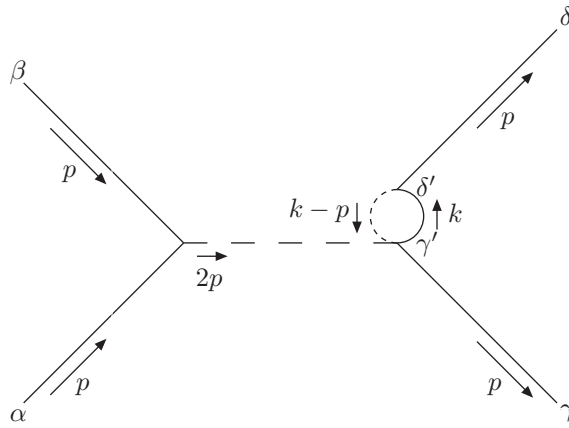


Figura 4.20: Diagrama veinticinco

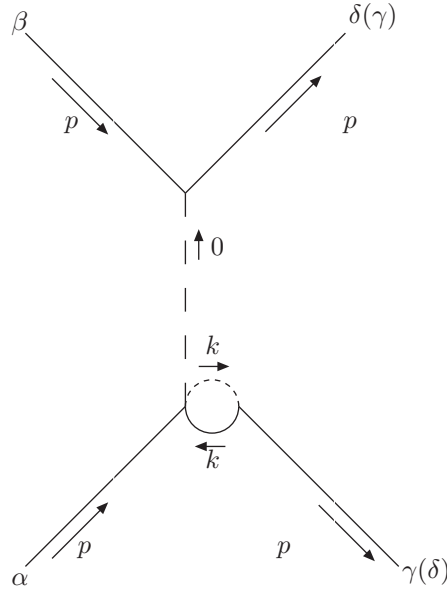


Figura 4.21: Diagrama veintiséis (veintisiete)

$$i\mathcal{M}_{26} = -8\lambda^6 v^2 \frac{1}{-m_\sigma^2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.64)$$

$$i\mathcal{M}_{27} = -8\lambda^6 v^2 \frac{1}{-m_\sigma^2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.65)$$

$$i\mathcal{M}_{28} = 48i\lambda^8 v^4 \frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.66)$$

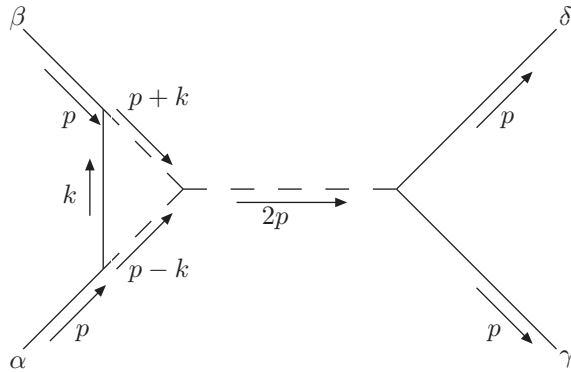


Figura 4.22: Diagrama veintiocho

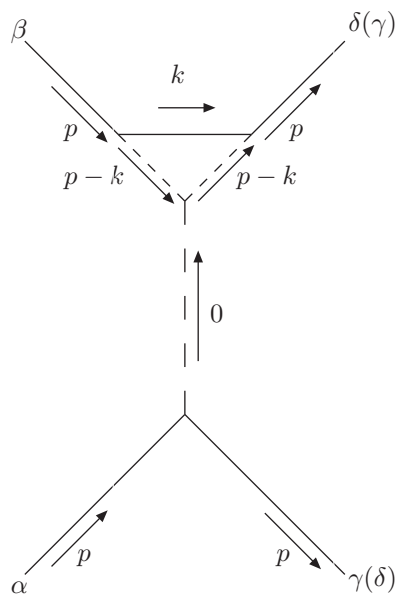


Figura 4.23: Diagrama veintinueve (treinta)

$$i\mathcal{M}_{29} = 48i\lambda^8 v^4 \frac{1}{-m_\sigma^2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.67)$$

$$i\mathcal{M}_{30} = 48i\lambda^8 v^4 \frac{1}{-m_\sigma^2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.68)$$

$$i\mathcal{M}_{31} = 8i\lambda^6 v^2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.69)$$

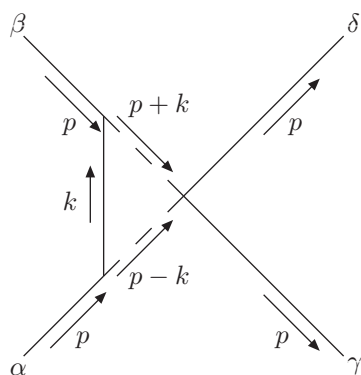


Figura 4.24: Diagrama treinta y uno

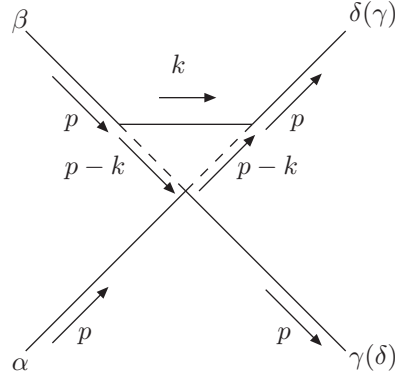


Figura 4.25: Diagrama treinta y dos (treinta y tres)

$$i\mathcal{M}_{32} = 8i\lambda^6 v^2 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.70)$$

$$i\mathcal{M}_{33} = 8i\lambda^6 v^2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \quad (4.71)$$

4.2.2. Cálculo de las amplitudes

Expuestas las amplitudes de los diagramas relevantes, necesitamos evaluar las integrales. Sea x el rótulo de una integral, la dividiremos en dos partes \tilde{x} y \hat{x} de tal modo que $x = \tilde{x} + \hat{x}$. En \tilde{x} estarán todos los términos de la integral que contribuyan según (3.15) a la parte real de la amplitud y que además contengan efectos térmicos, en \hat{x} incorporamos lo restante. Gracias a que en el límite estático no hay dependencia angular, no hay posibilidad de que un término aparentemente real se convierta en uno imaginario (y viceversa) durante el proceso de integración, por lo que los términos de x que van a contribuir a la parte real de la amplitud van a estar plenamente determinados desde el inicio. En general si la amplitud ya contiene la unidad imaginaria fuera de la integral, entonces la parte de la integral que va a contribuir con la parte real del diagrama va a ser la que no esté acompañada de la unidad imaginaria y viceversa.

$$a = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi)$$

Usamos la descomposición de Plemelj [22] de los propagadores

$$\begin{aligned}\Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) &= P\left(\frac{i}{k^2 - m_\pi^2}\right) + \left(\frac{1}{2} + n_B(|k_0|)\right)\delta(k^2 - m_\pi^2) \\ \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) &= P\left(\frac{i}{k^2 - m_\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\delta(k^2 - m_\sigma^2)\end{aligned}$$

donde P denota el valor principal de Cauchy, símbolo que será omitido por simplicidad. Se subentiende si no está puesto el término $i\epsilon$ en el denominador del propagador, que nos estamos refiriendo a la parte principal. Dicho lo anterior, la parte imaginaria (es la que sirve en este caso) y térmica de la integral es

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \left(\left(\frac{i}{k_0^2 - w_k^2} \right) n_B(|k_0 - 2m_\pi|) \delta((k_0 - 2m_\pi)^2 - w_k^2) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{i}{(k_0 - 2m_\pi)^2 - w_k^2} \right) n_B(|k_0|) \delta(k_0^2 - w_k^2) \right)\end{aligned}$$

donde hemos aprovechado de introducir $w_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2}$. Haciendo el cambio de variable $k_0 - 2m_\pi \rightarrow k_0$ y luego $-k_0 \rightarrow k_0$ en el primer término de la integral, podemos darnos cuenta que los dos términos son iguales por lo que

$$\tilde{a} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \left(\frac{2}{k_0^2 - w_k^2 + 4m_\pi^2 - 4k_0m_\pi} \right) n_B(|k_0|) \delta(k_0^2 - w_k^2)$$

Utilizando la propiedad de la delta

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, f(x_i) = 0,$$

podemos ver que

$$\delta(k_0^2 - w_k^2) = \frac{1}{2w_k} (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)). \quad (4.72)$$

De esta forma la integral es igual a:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dk_0 \left(\frac{1}{k_0^2 - w_k^2 + 4m_\pi^2 - 4k_0m_\pi} \right) \frac{n_B(|k_0|)}{w_k} (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)) \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{4w_k} \left(\frac{1}{m_\pi^2 - w_k m_\pi} + \frac{1}{m_\pi^2 + w_k m_\pi} \right) \\ &= \frac{i}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{w_k} \left(\frac{2m_\pi^2}{m_\pi^4 - w_k^2 m_\pi^2} \right)\end{aligned}$$

con lo que concluimos

$$\tilde{a} = \frac{-i}{(2\pi)^2} \int d|\vec{k}| \frac{n_B(w_k)}{w_k} = iA(m_\pi, T) \quad (4.73)$$

Definimos b de la siguiente forma

$$b = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi)$$

Para desarrollar \tilde{b} usamos la fórmula de derivada de masa para bajarle el orden al propagador, ya que si tratamos de desarrollar la integral sin esa fórmula, encontraremos el problema de una aparente divergencia como consecuencia que la parte térmica implica estar en la capa de masa. Entonces usamos [23]

$$\frac{1}{N!} \left(\frac{i\partial}{\partial m^2} \right)^n \Delta = \Delta^{n+1}.$$

En particular nos es de interés

$$\frac{i\partial \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi)}{\partial m_\pi^2} = \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.74)$$

Entonces desarrollemos una integral general I que contenga $\Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi)$

$$I = \int dk_0 F(k_0) \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi) = i \int dk_0 F(k_0) \frac{\partial \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi)}{\partial m_\pi^2} \quad (4.75)$$

Donde $F(k_0)$ es una función cualquiera que depende de k_0 . Sólo nos interesa la parte térmica del propagador por lo que

$$\begin{aligned} I &= \int dk_0 F(k_0) \frac{i\partial}{\partial m_\pi^2} \left(2\pi \frac{n_B(|k_0|)}{2w_k} (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)) \right) \\ &= 2\pi i \int dk_0 F(k_0) \left(\frac{\partial}{\partial m_\pi^2} \left(\frac{n_B(|k_0|)}{2w_k} \right) (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)) \right) \\ &\quad + \left(\frac{n_B(|k_0|)}{2w_k} \right) \frac{\partial}{\partial m_\pi^2} (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)). \end{aligned}$$

El segundo término de la integral lo integramos por parte por lo que el resultado para el primer soporte de la delta (I_{w_k}) es

$$\begin{aligned} I_{w_k} &= 2\pi \lim_{k_0 \rightarrow w_k} \left(\frac{i \left(\frac{dF(k_0)}{dk_0} \right) n_B(|k_0|)}{4w_k^2} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{F(k_0) \operatorname{sgn}(k_0) \left(\operatorname{csch}\left(\frac{|k_0|}{2T}\right) \right)^2}{16w_k^2 T} - i \frac{F(w_k) n_B(w_k)}{4w_k^3} \right) \quad (4.76) \end{aligned}$$

Para el segundo soporte (I_{-w_k}) tenemos

$$\begin{aligned}
 I_{-w_k} &= 2\pi \lim_{k_0 \rightarrow w_k} \left(\frac{-i \left(\frac{dF(k_0)}{dk_0} \right) n_B(|k_0|)}{4w_k^2} \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{F(k_0) \operatorname{sgn}(k_0) (\operatorname{csch}(\frac{|k_0|}{2T}))^2}{16w_k^2 T} - i \frac{F(-w_k) n_B(w_k)}{4w_k^3} \right) \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

De esta manera $I = I_{w_k} + I_{-w_k}$. Para desarrollar la integral \tilde{b} , usamos las ecuaciones (4.75), (4.76) y (4.77) y $F(k_0) = 1$, obteniendo

$$\tilde{b} = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{n_B(w_k)}{2w_k^3} + \frac{(\operatorname{csch}(\frac{w_k}{2T}))^2}{8T w_k^2} \right) = iB(m_\pi, T) \quad (4.78)$$

Otra integral que debemos resolver es

$$c = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi)$$

Los únicos términos que van a contribuir a \tilde{c} en este caso van a ser la parte real de la integral, la que va a estar dada por la multiplicación del propagador del sigma con los términos cruzados de la multiplicación de los propagadores piónicos (una inserción térmica). Se puede verificar, observando las amplitudes, que los términos provenientes de la multiplicación de dos inserciones térmicas no van a aportar a la parte real de la amplitud. Una parte que potencialmente sí puede estar en la parte real va a ser la multiplicación de la delta del propagador del sigma (de la descomposición de Plemelj) con las deltas de los propagadores del pion. No obstante, es fácil darse cuenta que no van a tener soporte dentro del intervalo de integración. En efecto, siempre la configuración de deltas que puede aportar a la parte real de la amplitud, va a ser la multiplicación de tres de ellas (como se puede fácilmente comprobar al examinar las amplitudes derivadas en la sección anterior), pero sólo tenemos dos variables de integración (recordemos que no hay variable angular) por lo sólo habrá contribución si las masas de los piones y sigmas cumplen alguna relación que en general no va a ser cierta. Es por esa razón, que en este ni en los diagramas que vienen, esa combinación de términos aportará.

$$\begin{aligned}
 \tilde{c} &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dk_0 \left(\frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m_\sigma^2} \right) \left(\frac{n_B(|k_0 - m_\pi|) \delta((k_0 - m_\pi)^2 - w_k^2)}{k_0^2 - w_k^2 + 2k_0 m_\pi + m_\pi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n_B(|k_0 + m_\pi|) \delta((k_0 + m_\pi)^2 - w_k^2)}{k_0^2 - w_k^2 - 2k_0 m_\pi + m_\pi^2} \right)
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $k_0 - m_\pi \rightarrow k_0$ en el primer término del último paréntesis y $k_0 + m_\pi \rightarrow k_0$ en el segundo, podemos comprobar que los dos términos de la integral son iguales. Entonces desarrollaremos el primer término y multiplicaremos por dos para obtener el resultado

$$\tilde{c} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dk_0 2 \left(\frac{1}{(k_0 + m_\pi)^2 - \vec{k}^2 - m_\sigma^2} \right) \frac{n_B(|k_0|) \delta(k_0^2 - w_k^2)}{(k_0 + m_\pi)^2 - w_k^2 + 2(k_0 + m_\pi)m_\pi + m_\pi^2}$$

Ocupando (4.72) llegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{c} = & - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{w_k} \left(\left(\frac{1}{2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right) \left(\frac{1}{4m_\pi^2 - 4w_k m_\pi} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right) \left(\frac{1}{4m_\pi^2 + 4w_k m_\pi} \right) \right) = C(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Otra integral que debemos calcular es

$$d = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\pi)$$

Hacemos el cambio de variable $k_0 - m_\pi \rightarrow k_0$

$$d = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi)$$

Al igual que \tilde{c} , \tilde{d} va a contener los términos reales de la integral. Para calcular \tilde{d} ocupamos (4.75), (4.76) y (4.77) con $F(k_0) = \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma)$.

$$\begin{aligned} \tilde{d} = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{(2w_k + 2m_\pi)n_B(w_k)}{4(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2 w_k^2} + \frac{(\text{csch}(\frac{w_k}{2T}))^2}{16T w_k^2 (2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)} \right. \\ & + \frac{n_B(w_k)}{4(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2) w_k^3} - \frac{(-2w_k + 2m_\pi)n_B(w_k)}{4(2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2 w_k^2} \\ & \left. + \frac{(\text{csch}(\frac{w_k}{2T}))^2}{16T w_k^2 (2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)} + \frac{n_B(w_k)}{4(2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2) w_k^3} \right) = D(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Definimos la siguiente integral

$$e = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi)$$

obviamente \tilde{e} sólo va a contener la parte térmica del propagador. Usando (4.72)

$$\tilde{e} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{w_k} = E(m_\pi, T) \quad (4.81)$$

En este punto, procederemos a resolver las integrales provenientes de los diagramas de caja (f , g y h). Para estas integrales los términos de interés serán los imaginarios, y estos van a provenir de la multiplicación de los términos cruzados de los propagadores piónicos por los propagadores del sigma.

$$f = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi)$$

Para resolver \tilde{f} ocupamos (4.75), (4.76) y (4.77) junto a $F(k_0) = \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma)$. Notamos que los dos soportes darán el mismo resultado, puesto que van a tener roles simétricos (alrededor de k_0) en el producto de los propagadores en $F(k_0)$.

$$\begin{aligned} \tilde{f} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} & \left(\frac{(2w_k + 2m_\pi)n_B(w_k)}{2(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2 (2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)w_k^2} \right. \\ & + \frac{(2w_k - 2m_\pi)n_B(w_k)}{2(2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2 (2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)w_k^2} \\ & + \frac{(\operatorname{csch}(\frac{w_k}{2T}))^2}{8T w_k^2 (2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)} \\ & \left. + \frac{n_B(w_k)}{2(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)(2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)w_k^3} \right) = iF(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$g = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta^2(k_0, \vec{k}, m_\pi)$$

Nuevamente usamos (4.75), (4.76) y (4.77), esta vez $F(k_0) = \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma)$. Acá los propagadores en $F(k_0)$ no son simétricos alrededor de k_0 , por lo que los dos soportes darán contribuciones distintas

$$\begin{aligned} \tilde{g} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} & \left(\frac{(w_k - m_\pi)n_B(w_k)}{(2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^3 w_k^2} + \frac{(\operatorname{csch}(\frac{w_k}{2T}))^2}{16T w_k^2 (2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2} \right. \\ & + \frac{n_B(w_k)}{4(2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2 w_k^3} + \frac{(w_k + m_\pi)n_B(w_k)}{(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^3 w_k^2} \\ & \left. + \frac{(\operatorname{csch}(\frac{w_k}{2T}))^2}{16T w_k^2 (2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2} + \frac{n_B(w_k)}{4(2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2)^2 w_k^3} \right) = iG(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$h = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - 2m_\pi, \vec{k}, m_\pi)$$

Acá no es necesario usar la fórmula de derivada de masa, pues los propagadores piónicos son distintos. Valiéndonos de (4.72) y el hecho que los dos términos cruzados (de la multiplicación de los propagadores del pion) son iguales (demostrado en el cálculo de $A(m_\pi)$), tenemos para \tilde{h}

$$\begin{aligned} \tilde{h} = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} & \frac{n_B(w_k)}{w_k} \left(\left(\frac{1}{4m_\pi^2 - 4w_k m_\pi} \right) \left(\frac{1}{2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4m_\pi^2 + 4w_k m_\pi} \right) \left(\frac{1}{2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right)^2 \right) = iH(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Terminado el cálculo de las integrales de 4 propagadores, ahora sólo nos quedan otras cuatro integrales. La siguiente integral corresponde a un loop formado por un propagador piónico con un propagador del sigma.

$$i = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \quad (4.85)$$

Como en todas las integrales de dos propagadores que hemos calculado, sólo los términos imaginarios contribuyen a que la amplitud sea real. Usando (4.72)

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(|k_0|)}{2w_k} (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)) \left(\frac{i}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m_\sigma^2} \right) \\ &= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{w_k} \left(\frac{1}{m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right) = iI(m_\pi, m_\sigma, T) = \left(\frac{i}{m_\pi^2 - m_\sigma^2} \right) E(m_\pi, T) \end{aligned} \quad (4.86)$$

En este punto nos quedan las integrales de un propagador piónico (sólo la inserción térmica) por dos del sigma (j y k)

$$\begin{aligned} j &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \Delta(k_0 + m_\pi, \vec{k}, m_\sigma) \\ \tilde{j} &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(|k_0|)}{2w_k} (\delta(k_0 - w_k) + \delta(k_0 + w_k)) \left(\frac{1}{(k_0 - m_\pi)^2 - \vec{k}^2 - m_\sigma^2} \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{(k_0 + m_\pi)^2 - \vec{k}^2 - m_\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Los dos soportes dan el mismo resultado, por el argumento ya esbozado en el cálculo de \tilde{f}

$$\tilde{j} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{w_k} \left(\frac{1}{2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right) \left(\frac{1}{2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right) = J(m_\pi, m_\sigma, T). \quad (4.88)$$

$$k = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta^2(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma)$$

\tilde{k} se resuelve de la misma forma que \tilde{j} , sólo que acá los dos soportes dan resultados distintos

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{2w_k} \left(\left(\frac{1}{2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right)^2 \right) \\ &= K(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.89)$$

La última integral la definimos de la siguiente forma

$$l = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta(k_0, \vec{k}, m_\pi) \Delta(k_0 - m_\pi, \vec{k}, m_\sigma)$$

Utilizando la ec. (4.72), obtenemos para \tilde{l}

$$\tilde{l} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(w_k)}{2w_k} \left(\frac{1}{2m_\pi^2 - 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} + \frac{1}{2m_\pi^2 + 2w_k m_\pi - m_\sigma^2} \right) = iL(m_\pi, m_\sigma, T) \quad (4.90)$$

4.2.3. Análisis numérico

Las integrales anteriores no tienen soluciones analíticas conocidas, por lo que se procederá a integrarlas numéricamente. Para evaluar las amplitudes es de importancia conocer los factores de simetría de los diagramas. Estos son los siguientes: $\frac{1}{2}$ para los diagramas 1, 2, 3, 7, 8 y 9 [24]. Además los diagramas 4, 5, 6, y del 19 al 33 hay que contarlos dos veces debido a que son correcciones al vértice y los loops pueden ocurrir en el vértice formado por dos índices de isospín, y en el vértice contrario. Teniendo cuidado de hacer las operaciones anteriores a las amplitudes y ocupando la ecuación (3.3) descomponemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A(s, t, u)_T = & -\lambda^4(14 + 80\lambda^2 v^2 (\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}) + 48\lambda^4 v^2 (\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2})^2) A(m_\pi, T) \\ & - 8\lambda^4 B(m_\pi, T) + \lambda^6(16v^2 + 32\lambda^2 v^4 (\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2})) C(m_\pi, m_\sigma, T) \\ & + 32\lambda^6 v^2 D(m_\pi, m_\sigma, T) - 12\lambda^6 v^2 (\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2})^2 E(m_\pi, T) + 32\lambda^8 v^4 F(m_\pi, m_\sigma, T) \\ & \lambda^6(96\lambda^2 v^4 (\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}) + 16v^2) J(m_\pi, m_\sigma, T) - 16\lambda^6 v^2 (\frac{1}{4m_\pi^2 - m_\sigma^2}) L(m_\pi, m_\sigma, T) \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} A(t, s, u)_T = & -4\lambda^4 A(m_\pi, T) - \lambda^4(11 + 80\lambda^2 v^2 (\frac{1}{-m_\sigma^2}) + 48\lambda^4 v^2 (\frac{1}{-m_\sigma^2})^2) B(m_\pi, T) \\ & + 16\lambda^6 v^2 C(m_\pi, m_\sigma, T) + \lambda^6(32v^2 + 32\lambda^2 v^4 (\frac{1}{-m_\sigma^2})) D(m_\pi, m_\sigma, T) \\ & - 12\lambda^6 v^2 (\frac{1}{-m_\sigma^2})^2 E(m_\pi, T) + 16\lambda^8 v^4 G(m_\pi, m_\sigma, T) + 16\lambda^8 v^4 H(m_\pi, m_\sigma, T) \\ & - 16\lambda^6 v^2 (\frac{1}{-m_\sigma^2}) I(m_\pi, m_\sigma, T) + \lambda^6(96\lambda^2 v^4 (\frac{1}{-m_\sigma^2}) + 16v^2) K(m_\pi, m_\sigma, T) \\ = & A(u, t, s)_T \end{aligned} \quad (4.92)$$

El subíndice T denota que nos estamos refiriendo a las correcciones térmicas.

Como estamos haciendo correcciones a un loop debemos ocupar los parámetros ya renormalizados a temperatura cero. El modelo sigma lineal sin nucleones tiene tres parámetros m_π^2 , f_π y λ^2 en la versión renormalizada. Los valores de los primeros dos están dados por experimentos y el tercero es un parámetro libre. El valor de λ y f_π son conocidos para una masa del sigma de 700 MeV [12]. Trasladar estos valores para $m_\sigma = 550$ MeV no es tarea sencilla, supone tener conocimientos de renormalización. Por esa razón, para poder seguir supondremos que las constantes de renormalización no cambian en el rango 550-700 MeV, es decir trabajamos a primer orden en la expansión de las constantes. Por esta razón trabajaremos con los siguientes valores de los acoplamientos. Para $m_\sigma = 700$ MeV tenemos:

$$v = 90MeV \quad (4.93)$$

$$\lambda^2 = 7.0 \quad (4.94)$$

$$v = 120MeV \quad (4.95)$$

$$\lambda^2 = 5.63 \quad (4.96)$$

Para $m_\sigma = 550$ MeV ocuparemos

$$v = 90MeV \quad (4.97)$$

$$\lambda^2 = 4.3 \quad (4.98)$$

Recordamos que los valores de λ , v y m_σ están relacionados a nivel árbol por la ecs. (4.25) y (4.26).

Ahora estamos en condiciones de conocer $a_0^0(T)$ y $a_0^2(T)$. Para eso agrupamos $A(s, t, u)_T$, $A(t, s, u)_T$ y $A(u, t, s)_T$ en la forma de las ecs. (3.8) y (3.10), luego ocupamos (4.24) y obtenemos las correcciones térmicas a las longitudes de scattering. Los valores que ocuparemos a temperatura cero para estos parámetros provienen del cálculo a dos loops hecho en la ref. [25] $a_0^0 = 0.217$, $a_0^2 = -0.041$. Notar que el valor a nivel árbol obtenido en este trabajo no está muy lejos de esos valores. De esta forma

$$a_0^0(T) = 0,217 + \frac{3A(s, t, u)_T + 2A(t, s, u)_T}{32\pi} \quad (4.99)$$

$$a_0^2(T) = -0,041 + \frac{2A(t, s, u)_T}{32\pi} \quad (4.100)$$

La figura 4.26 nos muestra el valor de las longitudes de scattering dependientes de la temperatura normalizadas por su valor a temperatura cero. Observamos que a_0^0 aumenta

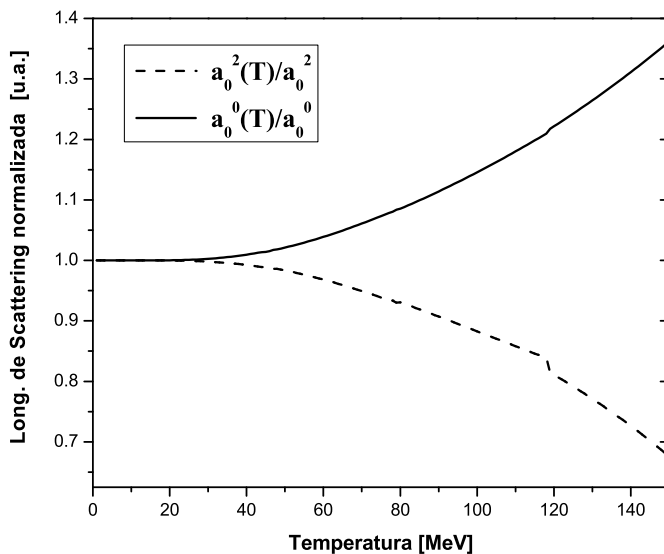


Figura 4.26: Longitudes de scattering normalizadas a temperatura cero.

hasta alrededor de un 35% su valor a 150 MeV, mientras a_0^2 decrece (en magnitud) a un 67% aproximadamente de su valor a temperatura cero también a 150 MeV. Otras estimaciones de la evolución de estos parámetros con la temperatura fueron llevadas a cabo por Quack [26] en el contexto del modelo de Nambu-Jona-Lasinio, y Kaiser [27] en el contexto de teoría quiral de perturbaciones. El trabajo de Quack está en discrepancia en los dos parámetros con nuestro cálculo. Él encuentra que hasta temperaturas de 150 MeV tanto $a_0^0(T)$ como $a_0^2(T)$ permanecen casi constantes. La tendencia es la misma para $a_0^0(T)$ que aumenta levemente y contraria para $a_0^2(T)$ que aumenta (en magnitud) aunque también muy levemente. El trabajo de Kaiser está de acuerdo con el de Quack para $a_0^0(T)$ ya que a temperatura de 150 MeV calcula un aumento de alrededor de 2% respecto a su valor de temperatura cero. Para el caso $a_0^2(T)$ sin embargo, nuestro trabajo coincide de muy buena manera con el valor calculado por Kaiser. Él encuentra que este parámetro decrece (en magnitud) hasta llegar a un 60% de su valor a temperatura cero, mientras nosotros calculamos que llegaba a un 67%.

Es importante notar que las dos curvas obtenidas en este trabajo tienen la misma tendencia que las obtenidas por Kaiser. Probablemente cuando refinemos el cálculo (para calcular λ renormalizado) las curvas coincidan de mejor manera. Aún más, tomando en cuenta que el parámetro de expansión efectivo, que en este caso es $\frac{\lambda^2}{8\pi^2}$ [12], podría ser

CAPÍTULO 4. CÁLCULO DE LONGITUDES DE SCATTERING

otro aún más pequeño como sugiere la ref [28].

Capítulo 5

Conclusiones

La intención de este trabajo fue estudiar la evolución de las longitudes de scattering pion-pion con la temperatura. El rango que hemos elegido es de 0 a 150 MeV, pues a temperaturas superiores se espera la restauración de la simetría quiral, y eventualmente la ocurrencia del deconfinamiento en quarks y gluones.

Inicialmente calculamos los valores a nivel árbol de las longitudes de scattering y pendientes para momento angular $\ell = 0$ y $\ell = 1$. Encontramos que nuestros valores para $m_\sigma = 550 \text{ MeV}$ no difieren en demasía con los valores estándar (de Weinberg) en teoría quiral de perturbaciones, y aún mejor, están más cerca de las determinaciones experimentales.

Para introducir las correcciones térmicas sumamos todos los posibles diagramas a un loop, desechando las contribuciones térmicas de nucleones y mesones sigma por su gran masa respecto a la del pion, lo que implica una fuerte supresión de Boltzmann. Usando un valor de λ^2 renormalizado de 4.3 encontramos que a 150 MeV a_0^0 crece alrededor de un 35 % y a_0^2 decrece en magnitud aproximadamente un 33 % respecto a sus valores a temperatura cero. Esta determinación está en abierta discrepancia con la encontrada por Quack en el contexto del modelo de Nambu-Jona-Lasinio donde ambas magnitudes permanecen básicamente constantes. Comparando con los valores obtenidos por Kaiser en teoría quiral de perturbaciones a_0^2 se comporta casi idénticamente, en tanto que nuestro a_0^0 crece más rápidamente que la predicción de Kaiser.

Con el objetivo de refinar este cálculo, en el futuro planeamos incorporar los diagramas con inserciones térmicas del sigma y de los nucleones con el objetivo de comparar órdenes de magnitud de los distintos diagramas. También, como desafío, está replicar los cálculos a un loop a temperatura cero con el fin de poder determinar de mejor forma el valor de λ renormalizado. Por último y en la misma dirección, estudiaremos la aparición de un parámetro efectivo en la expansión perturbativa, asociado al estudio de las identidades

de Ward quirales, siguiendo a [28].

Índice de figuras

4.1. Diagrama nivel árbol scattering directo	21
4.2. Diagrama nivel árbol canal s	22
4.3. Diagrama nivel árbol canal t	23
4.4. Diagrama nivel árbol canal u	23
4.5. Diagrama uno	31
4.6. Diagrama dos (tres)	32
4.7. Diagrama cuatro	32
4.8. Diagrama cinco (seis)	33
4.9. Diagrama siete	34
4.10. Diagrama ocho (nueve)	34
4.11. Diagrama diez	35
4.12. Diagrama once (doce)	36
4.13. Diagrama trece (catorce)	37
4.14. Diagrama quince (dieciseis)	37
4.15. Diagrama diecisiete (dieciocho)	38
4.16. Diagrama diecinueve	38
4.17. Diagrama veinte (veintiuno)	39
4.18. Diagrama veintidós	40
4.19. Diagrama veintitrés (veinticuatro)	41
4.20. Diagrama veinticinco	41
4.21. Diagrama veintiséis (veintisiete)	42
4.22. Diagrama veintiocho	42
4.23. Diagrama veintinueve (treinta)	43
4.24. Diagrama treinta y uno	43
4.25. Diagrama treinta y dos (treinta y tres)	44
4.26. Longitudes de scattering normalizadas a temperatura cero.	53

Bibliografía

- [1] S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 17 (1966) 616.
- [2] A. Das, “Finite Temperature Field Theory”, World Scientific Publishing, 1997.
- [3] T. Matsubara, Progress of Theoretical Physics 14 (1955) 351.
- [4] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D 9 (1974) 3320.
- [5] V. Koch, Introduction to Chiral Symmetry, Lectures, TAPS Workshop, Bosen, Germany, Sep 1995. nucl-th/9512029.
- [6] M. Gell-man and M. Levy, Nuovo Cimento 16, (1960) 705.
- [7] C. Contreras and M. Loewe, Int. Jour. of Mod. Phys. A5, (1990) 2297.
- [8] A. Larsen, Z. Phys. C 33, (1986) 291.
- [9] N. Bilic and H.Nikolic, Eur. Phys. J. C6 (1999) 513.
- [10] H. Mao, N. Petropoulos and W-K. Zhao, J. Phys. G32, (2006) 2187; N. Petropoulos, arXiv: hep-ph/0402136 and references therein.
- [11] M. El-Sheik, “Efectos de temperatura y potencial químico de isospín en el modelo σ lineal”, Informe de práctica presentado a la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica.
- [12] B. Lee, “Chiral Dynamics”, Gordon and Breach, 1972.
- [13] P. Roman, “Advanced Quantum Theory”, Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- [14] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, “Dynamics of The Standard Model”, Cambridge University Press, 1996.
- [15] P.D.B. Collins “Introduction to Regge Theory”, Cambridge University Press, 1977.

BIBLIOGRAFÍA

- [16] J. Gasser, H. Leutwyler, “Chiral Perturbation Theory to one loop”, *Ann. of Physics* 158 (1984) 142.
- [17] I.Nakamura, “Pion-Pion scattering in the $SU_L(2) \times SU_R(2)$ linear sigma model”, Dissertation submitted to graduate school for the degree of Master of Physics, Osaka University.
- [18] E791 Collaboration, E.M. Aitala, et al, *Phys. Rev. Lett.* 86, 765 (2001), *ibid Phys. Rev. Lett.* 86, 770 (2001); J.M. de Miranda, I. Bediaga: Scalar meson sigma (500) phase motion at $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+ + Decay$. AID conf. Proc.814: 654-659 (2006).
- [19] L. Rosellet, et al. *Phys. Rev.* D15, (1977) 574.
- [20] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 17 (1966) 336.
- [21] H-J. Schulze, *J. Phys. G, Ncl. Part. Phys.* 21 (1995) 185.
- [22] M. Le Bellac, “Thermal Field Theory”, Cambridge University Press, 1996.
- [23] Y. Fujimoto, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Phys. Rev. D* 30 (1984) 1400.
- [24] P. Ramond, “Field Theory A Modern Primer”, Benjamin Cummings, 1981.
- [25] J. Bijnens et al, *Phys. Lett. B* 374, (1996) 210.
- [26] E. Quack et al, *Phys. Lett. B* 348 (1995) 1.
- [27] N. Kaiser, *Phys. Rev. C* V. 59, N. 5 (1999) 2945.
- [28] A. Ayala and S. Sahu, *Phys. Rev. D* 62 (2000) 056007-1.